МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ровняго Дмитрий Витальевич**

Класс: **10 класс**

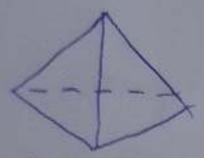
Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	10	15	15	15	5	0

№2 (черновик)



$l = 2\pi r$

$l_s \pm 2r$

№3 (черновик)

Д, то должен написать

$10^{2022} - 9^{2022}$

$10^{2024} - 9^{2022} \equiv -9^{2022} (10^3)$

$9^2 = 81$

$9^3 = 729$

$9^4 (10^3)$

$\varphi(103) = 103 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 400$

$9^{400} \equiv 1 (10^{3})$

$9^{2000} \equiv 1 (10^3)$

Чистовик

№3

1) Заметим, что последние 3 цифры числа – это остаток при делении на 1000.

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv -9^{2022} (1000)$

по т. Эйлера $9^{\varphi(1000)} \equiv 1 (1000)$ т.к. $9 \perp 1000$

$= \varphi(1000) = 1000(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

$9^{400} \equiv -9^{2000} \cdot 9^{22} \equiv -(9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv -9^{22} (1000)$

$9^{22} = 9^{16} \cdot 9^4 \cdot 9^2$

$9^4 = 81 \cdot 81$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline \dots 81 \\ +\ \dots 48 \\ \hline \dots 561 \\ +\ \dots 66 \\ \dots 5 \\ \hline \dots 721 \end{array}$$

$9 \equiv 9 (1000)$

$9^2 \equiv 81 (1000)$

$9^4 \equiv 561 (1000)$

$9^8 \equiv 721 (1000)$

$9^{16} \equiv 841 (1000)$

$9^{16} \cdot 9^4 \equiv 801 (1000)$

$9^{16} \cdot 9^4 \cdot 9^2 \equiv 881 (1000)$ $9^{16} = 721 \cdot 721$

$$\begin{array}{r} 721 \\ \times\ 721 \\ \hline \dots 721 \\ \dots 442 \\ \dots 7 \\ \hline 841 \end{array}$$

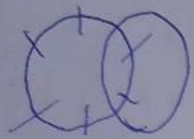
$-9^{22} \equiv -881 \equiv 1000 - 881 \equiv 119 (1000)$

$$\begin{array}{r} 801 \\ \times\ 81 \\ \hline \dots 801 \\ \dots 08 \\ \hline 881 \end{array}$$

Ответ: 119

чепчик

№1

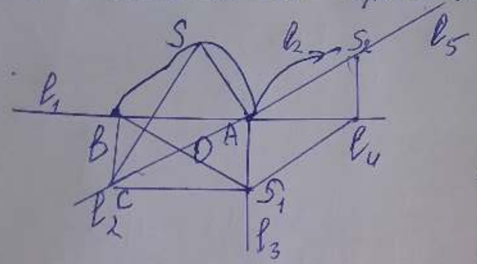
 → 1+1

3 = $\boxed{1+2}$

Чистовик №2

№2

1) если все рёбра 6 см, то все грани правильные треугольники. И на поверхности стола „отпечатается" правильный шестиугольник.



Пусть A - неподвижная вершина, S - подвиж. $l_1, l_2 \ldots l_6$ - пути из A·B

Вершины $6^{ти}$ угольника

Путь S находится выше стола в секторе $l_1 l_2$, далее S попадает по l_3 в т. S_1, ещё один перекат остаётся там. И по той же траектории попадает в положение S_2 над столом в секторе $l_4 l_5$, оставшиеся 3 переката аналогичны. А, значит, всё пройденное расстояние т. S - это 4 траектории SS_1

3) Заметим, что AC при движении $S \to S_1$ остаётся на месте, а значит SS_1 - это дуга с радиусом $h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$.

№6 (черновик)

$f(x)=2x^2-1$

№5 черновик

$t^3+4t^2+4t+a=0$

$x<y<z$

$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+3z$

$y^3+4y^2+4y+a=0 \Rightarrow -4y^2-4a^2+y^3+a-4z^2-4z$

$=z^3+a$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

$+3xyz=(x+y+z((x^2+y^2+z^2)^2-3(xy+xz+yz))$

$+3xyz=-a$

$A=-4(16-12)-3a+2a+32=16-a$

$f'(t)=3t^2+8t+4\geq 0$

$D=64-4\cdot 3\cdot 4=16$

$t_{12}=\frac{-8\pm 4}{6}=\{-2;-\frac{2}{3}\}$

$x_{max}=-2$

$x_{min}=-\frac{2}{3}$

$f(x_{max})=-8+16-8+2>0 \Rightarrow a>0$

$f(min)=-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+a<0$

$a<\frac{8-48+32}{27}=\frac{32}{27}$

$f(x_{max})=-8+16-8+2>0 \Rightarrow a>0$

$f(min)=-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+a<0$

$a<\frac{8-48+72}{27}=\frac{32}{27}$

Чистовик

Чистовик

№2 (продолжение)

4) Рассм сечение BSS_1

$BS = 6$

$OB = OS = OS_1 = 3\sqrt{3}$

$\cos\angle BOS = \dfrac{OB^2 + OS^2 - BS^2}{2OB\,OS}$

$= \dfrac{27+27-36}{2\cdot 27} = \dfrac{18}{2\cdot 27} = \dfrac{1}{3}$

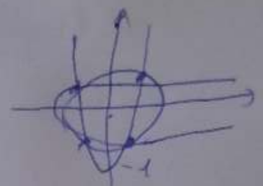
$\cos\angle SOS_1 = -\cos\angle SOB = -\dfrac{1}{3}$

и $SS_1 = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 6$

Ответ: $24\cdot\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

№6 (Черновик)

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$$



$x = 4(2x^2 - 1)^2 - 2$

$x = 4(4x^4 - 4x^2 + 1) - 2$

$x = 16x^4 - 16x^2 + 4 - 2$

$16x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

$x^2 - 2x_0x + x_1^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = R^2$

$x^2 = \frac{y+1}{2}$

$y^2 = \frac{x+2}{4}$ $\frac{y+1}{2} - 2x_0x + x_0^2 + \frac{x+2}{4} - 2y_0y + y_0^2 = R2$

$y(\frac{1}{2} - 2y_0) + x(\frac{1}{4} - 2x_0)$...

Чистовик

№1

! n – искомое число
k – остаток по mod = 0

$0 \le x \le 19$

$0 \le x+1 \le 20$

$$\begin{cases} n \equiv x\ (20) \\ n \equiv x+1\ (21) \end{cases}$$

$21n \equiv 21x \equiv x\ (20)$

$20n \equiv 20x + 20\ (21)$

$n \equiv x - 20\ (20 \cdot 21)$

т.к. $x \le 10 \Rightarrow x - 20 < 0 \Rightarrow n = k \cdot 20 \cdot 21 + x - 20$

$k = 1$ – наим.-ее нат.-ое ~~число~~ $n = 20 \cdot 21 + x - 20 = 400 + x$

$400 \le n \le 419$

т.к. $400 \equiv 4\ (22)$

$419 \equiv 1\ (22)$ то в этом диапозоне нет остатков 2 и 3 mod 22.

$k = 2$ $n = 2 \cdot 20 \cdot 21 + x - 20 = 820 + x$

$820 \le n \le 839$

т.к. $820 \equiv 6\ (\text{mod } 22)$

$838 \equiv 2\ (\text{mod } 22)$

при $n = 838$ и $838 \equiv 18\ (20)$

$838 \equiv 19\ (21)$

Ответ: 838

Черновик

№1

$0 \le x < 10$

$n \equiv x \ (20)$

$n \equiv x+1 \ (21)$

$n \equiv 2 \ (22)$

$n = 22k + 2$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} n \equiv x \ (20) \\ n \equiv x+1 \ (21) \end{cases}$$

№2 (1)

1) перва

Чистовик

№6

Если точки пересечения $(x;y)$ равноудалены от некой $(x_0;y_0)$, то:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=const$$

$$y=2x^2-1 \Rightarrow x^2=\frac{y+1}{2}$$

$$x=4y^2-2 \Rightarrow y^2=\frac{x+2}{4}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=const$$

$$x^2-22x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=const$$

$$\frac{y+1}{2}-2x_0x+\frac{x+2}{4}-2y_0y=const$$

$$y\left(\frac{1}{2}-2y_0\right)+x\left(\frac{1}{4}-2x_0\right)=const$$

А это выражение не зависит от x и y, если

$$\frac{1}{2}-2y_0=0 \Rightarrow y_0=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-2x_0=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{8}$$

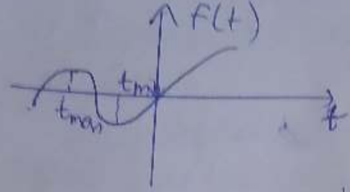
Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$

Чистовик

№5

$f(t)=t^3+4t^2+4t+a=0$

1) Найдём условие существования трёх решений



Корни различны и существуют, если:

$$\begin{cases} f(t_{max})>0 \\ f(t_{min})<0 \end{cases}$$

$f'(t)=3t^2+8t+4=0$

$D=64-4\cdot 3\cdot 4=16$

$t_{н}=\dfrac{-8\pm 4}{6}=\left\{-2;\ -\dfrac{2}{3}\right\}$ $\quad t_{max}=-2,\ t_{min}=-\dfrac{2}{3}$

$$\begin{cases} -8+16-8+a>0 \Rightarrow a>0 \\ -\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{9}-\dfrac{8}{3}+a<0 \Rightarrow a<\dfrac{8-48+72}{27}=\dfrac{32}{27} \end{cases}$$

$a\in\left(0;\dfrac{32}{27}\right)$

2) По т. Виета

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ xy+xz+yz=4 \\ xyz=-a \end{cases}$$

3) Заметим, что

$y^3+y^2+4y+a=0$

$z^3+4z^2+4z+a=0 \Rightarrow z^3+a=-4z^2-4z$

$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=x^3+y^3+z^3+2a+32=$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz+2a+32=$

$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+xz+yz))+3xyz+2a+32=$

$=-4\cdot(16-3\cdot 4)-3a+2a+32=16-a$

т.к. $a\in\left(0;\dfrac{32}{27}\right)\Rightarrow -a\in\left(-\dfrac{32}{27};0\right)\Rightarrow 16-a\in\left(16-\dfrac{32}{27};16\right)$

$\Rightarrow A\in\left(14\dfrac{22}{27};16\right)$

Ответ: $A\in\left(14\dfrac{22}{27};16\right)$

Чистовик

№4

1) Покажем, что ничьих при правильной игре не бывает.

Если стоят рядом две „2", то следующим ходом кто-то побеждает.

Если возле каждой двойки стоят только единицы, посмотрим на появление первой тройки: $\boxed{\begin{array}{c}1\ 2\ 1\\ 3\end{array}}$ тогда следующий игрок объединяет 3+1 и побеждает

2) Покажем, что побеждает второй:

Если после хода первого, второй не может закончить игру, он ходит симметрично относительно центра и после такого хода первый не может сделать „4": иначе бы „4" можно было сделать с диаметрально противоположной позиции, А поскольку единицы рано или поздно закончатся, то аналогично п.1. появятся „2+2" или „3"

Ответ: победит второй