МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Седракян Артём Арменович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

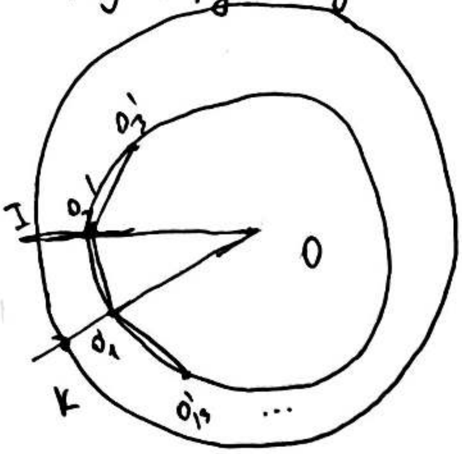
Результаты проверки:

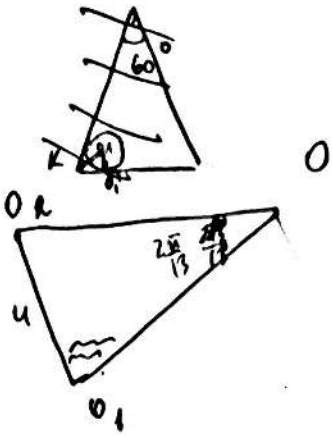
№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	15	15	15

Чистовик

№4

Вид сверху на конус





Дано:

$\varphi = 60^\circ$

$n = 13$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ - шары

т. $O_1, O_2, O_3, \dots O_{13}$ - центр окр.

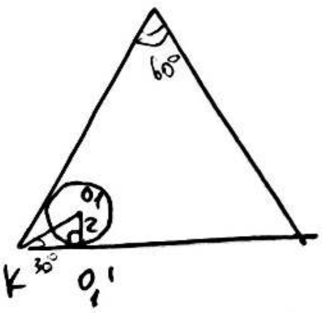
$r = 2$

$R_{осн.}$ - ?

Решение

1) $O_1', O_2', O_3', O_4' \dots O_{13}'$ - правильный 13-угольник, где O_x' - проекция O на плоск. основания

Сторона равна $2R = 4$



2) $KO_1' = 2 \cdot ctg\, 30^\circ = 2\sqrt{3}$
и $O_1'I$

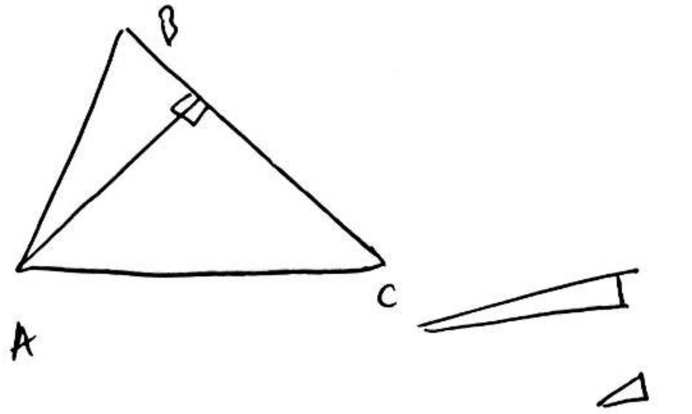
$\angle OO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13} = \frac{11\pi}{26}$

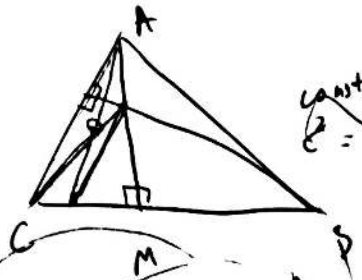
$OO_1' = \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}}$.

$\Rightarrow \quad R_{осн.} = \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}} + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $R_{осн.} = \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}} + 2\sqrt{3}$

№ 7 черновик

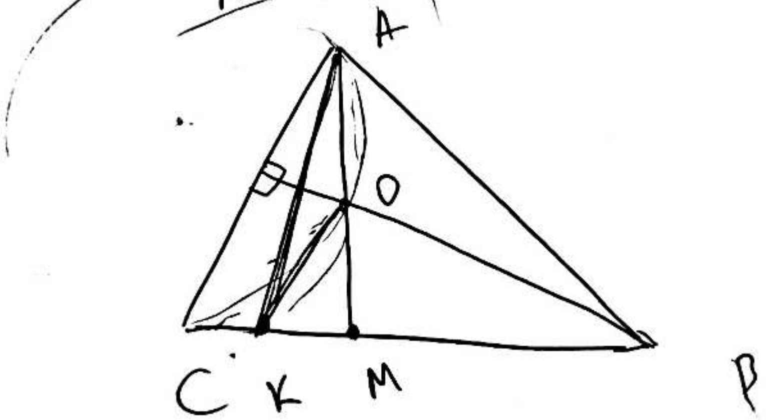




$\angle AKO$ – max

const

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$



№ 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$f(f(x))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}$$

$$\frac{1-x^7-1}{1-x^7}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}}$$

№ 3

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7=\frac{1}{1-x^7}-1 \quad (1-x^7)$$

$$\frac{x^7}{1-x^7}$$

$$1-\frac{1}{1-x^7}=\frac{1-x^7-1}{1-x^7}=\frac{-x^7}{1-x^7}=\frac{x^7}{x^7-1}$$

$$\frac{1\cdot\sqrt[7]{x^7-1}}{x}=\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$\sqrt[7]{1-x^7}\cdot\sqrt{\frac{x^7}{1-x^7}}$$

$$\sqrt{1-x^7}\cdot\frac{x^7}{\sqrt{1-x^7}}=$$

Черновик

№ 1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$B = 1$

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

$$\frac{a+2}{(a+1)(a+2)^2} + \frac{a+4}{(a+2)(a+3)^2}$$

$$\frac{3(3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 45) + 5\cdot(1\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 45) + 7(1\ldots}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\ldots 44^2\cdot 45^2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} =$$

$$\frac{a+2}{(a(a+1))^2} + \frac{a+4}{((a+1)(a+2))^2}$$

$$\frac{a+2}{a^2(a+1)^2} + \frac{a+4}{(a+1)^2(a+2)^2}$$

$$\frac{(a+2)^3 + (a+4)a^2}{a^2(a+1)^2(a+2)^2}$$

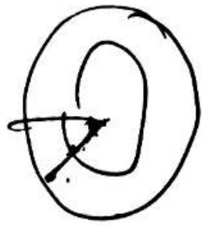
Черновик

№2

$$\frac{\cancel{1}+2}{(1\cdot 2)^2}+\frac{2+3}{(2\cdot 3)^2}$$

$\cancel{1\cdot(2\cdot 3)^2+2\,(2\cdot 3)^2}$

N 4



$$\frac{(1+2)\cdot 3^2+(2+3)\cdot 1^2}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}$$

$$=\frac{1\cdot 3^2+2\cdot 3^2+2\cdot 1^2+3\cdot 1^2}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}$$

$$=\frac{2(3^2+1^2)+3(3+1^2)\;1\cdot 3(3+1)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}$$

$(a^2+b^2)\cdot c+$

2021

N 2

$\overbrace{19\,^{25}\ldots\ldots\ldots}^{2021}$

втора

$23\cdot 4=92$ $23\cdot 3=69$ $23\cdot 4=92$

76

$19\cdot 4=76$

$19\cdot 3=57+19=$

$19\,\cancel{2}\,38$ 8   9

2021

$\cancel{23}\cdot$

$19\cdot 5=95$

$23\cdot 2=46$ $23\cdot 3=69$

$19\cdot 4=76$

1 2 3 4 5 6

195769

~~$19\cdot 3=57$~~

2020   2021

~~2020~~:

9576

Ответ: 6.

[redacted]

Черновик

5

№ 1

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \cancel{\frac{2n+1}{n}} \quad \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2 (n+1)^2}$$

$n=1$ $\quad n+1=2$

$$A = \left(\frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right)$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{45^2}}$$

6

Черновик

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{3^3 + 5\cdot 1^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2\cdot 3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3\cdot 4}\right)^2$$

$$\frac{3\cdot 3^2\cdot 4^2 \cdots 45^2 + 5\cdot 1^2\cdot 4^2\cdot 5^2 \cdots 45^2 + 7\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 7^2 \cdots}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \cdots 45)^2}$$

$$3^3\cdot 4^2 \cdots 45^2 + 5^3\cdot 1^2\cdot 4^2 \cdots 45^2 + 7^3\cdot 1^2\cdot 2^2 \cdots 45^2$$

44

$89 = 3 + 2(n-1)$

$86 = 2n - 2$

$88 = 2n$

$\underline{n = 44}$

$(1+2)\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2 + (2+3)\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot 6^2\cdot 7^2$

$7\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot 6^2 \cdots 45^2 + 45\cdot 2^2\cdot 3^2 \cdots 43^2$

$$\frac{a+3}{(a+1)(a+2))^2} + \frac{a+5}{(a+2)}$$

$\frac{3}{4} + 5$

$$\frac{1+2}{1^2\cdot 2^2} + \frac{2+3}{3^2\cdot 2^2} + \frac{3+4}{3^2+4^2}$$

$$\frac{2a+3}{a}$$

$$\frac{a+b}{a^2 b} + b + \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} + \frac{2a+3}{a}$$

$$= \frac{2a+1}{(a^2+a)^2}$$

Чистовик

№2

2021-знач число . а.

1) Двуз нат. числа кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95

2) Двузн. числа кратные 23: 23, 46, 69, 92.
Т.к. первое число 1, то второе будет 9

Если ~~первое~~ второе число 9, то
а) начинается 95 → 57 → 76 → 69 → ...

или
б) нач. 92 → 23 → 38,

на 8 нет чисел среди выше перечисл. =>

будет повторяться цепочка а):

9576, 9576 ...
до самого конца или последняя цепочка ... 9238.

Т.к. число содержит 2021 цифру,
$2021 = 1 + 4 \cdot 505$, то в числе вместится
в числе 505 цепочек „9576" и первая цифра 1.

В этом случае последняя цифра 6

Также если можно взять 504 цепочки „9576" и в конце расположить „9238", то последняя цифра будет 8.

Ответ: 6 или 8.

Чистовик

№ 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = t \quad ; \quad f \ldots f(2022)$$

$$f(f(x) = f(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-t^7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{x^7}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} =$$

$$= \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}} = u$$

$$f(f(f(x) = f(u) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-u^7}} =$$

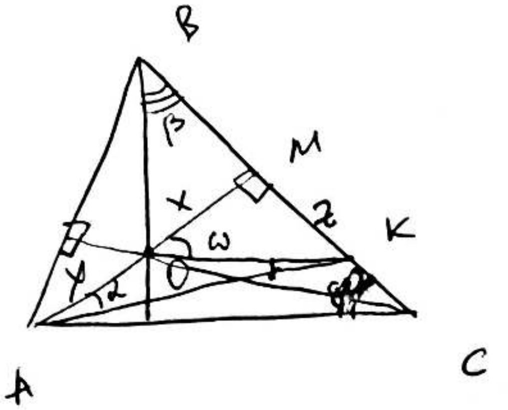
$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-(1-\frac{1}{x^7})}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{1}{x^7}}} = \sqrt[7]{x^7} = x$$

Число 1104 при делении на 3 даёт остаток 2.
То есть это значит, что в ответе будет значение

$u = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$; Отвa : $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$.

Чистовик

N7 5



Дано:

$\triangle ABC$ – остроуг.

AM – высота

O – т. пересеч. высот

$\angle AKO$ – максимален

$BM=5$

$MC=3$

Найти: MK

Решение.

$\omega = \alpha + \gamma$, x – макс $\Rightarrow$ $tg\gamma$ – макс.

1) $\gamma = \omega - \alpha$,

$\angle AKO$ – макс С

$tg\alpha = \frac{z}{x+y}$, $tg\,\omega = \frac{z}{x}$; $OM = x$; $MK = z$, $AO = y$

$$tg\gamma = tg(\omega - \alpha) = \frac{tg\,\omega - tg\alpha}{1 + tg\,\omega \cdot tg\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{z}{x} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{x(x+y)}} = \frac{z(x+y) - zx}{x^2 + xy + z^2};$$

$$tg\gamma = F(z)$$

Возьмём производную по z.

$$F'_z = \frac{y(x^2+xy+z^2 - z \cdot 2z)}{(x^2+xy+z^2)^2} = \frac{y(x^2+xy-z^2)}{(x^2+xy+z^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$z^2 = x^2 + xy$$

$$z = \sqrt{x(y+x)}$$

0 $+$ $\sqrt{x^2+yx}$ $-$

Чистовик

№7 (продолжение)

В этой точке достигается максимум тангенса, а значит максимум острого угла γ.

Отсюда вывод:

$$MK^2 = OM \cdot AM$$

$OM = 5 \cdot tg\beta$; $AM = 3 \cdot tg\varphi$, но

$\beta + \varphi = 90^\circ \Rightarrow tg\varphi = ctg\beta \Rightarrow$

$tg\beta \cdot tg\varphi = 1 \Rightarrow MK^2 = 5 \cdot tg\beta \cdot 3 \cdot tg\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow MK^2 = 15$, $MK = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$.

N5

$x_1 \le x_2 \le x_3$,

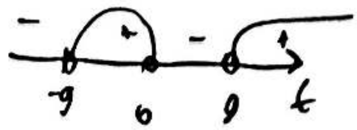
$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$a > 0 \Leftrightarrow t^3 - 81t > 0$

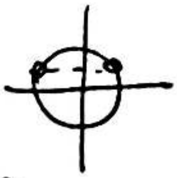
$t(t^2 - 81) > 0$



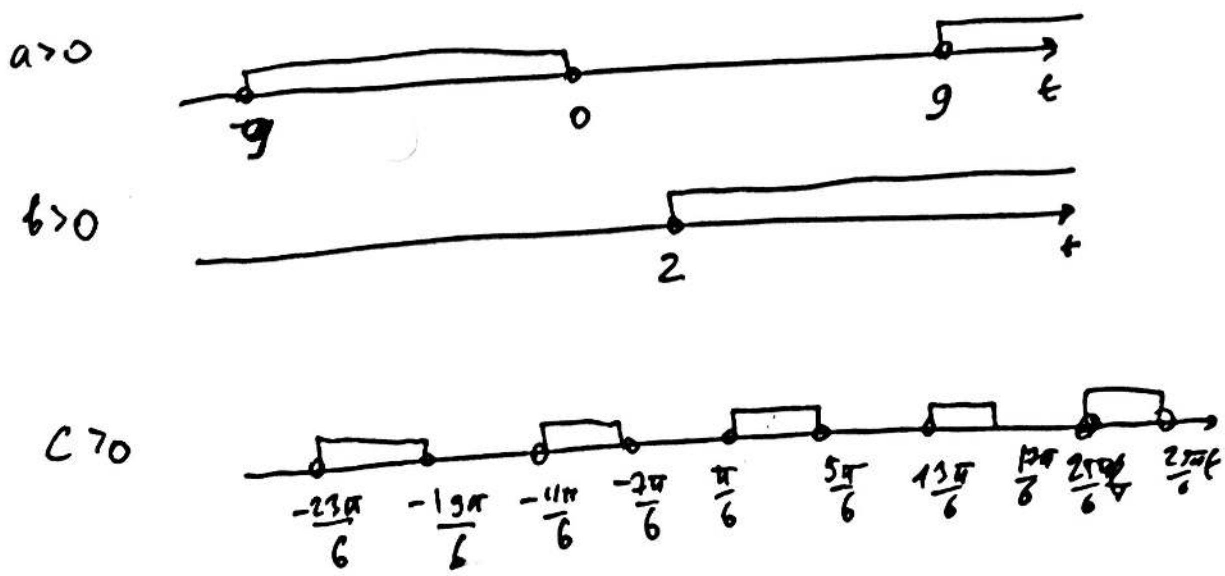
$t \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$

$b > 0 \Leftrightarrow 11^t > 121 \Leftrightarrow t > 2$

$c > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$



Отметим на прямой



№5 (продолжение)

$$-\frac{19\pi}{6} < -\frac{19\cdot 3,1}{6} = -\frac{58,9}{6} < -9$$

$$\frac{\pi}{6} < 1 < 2$$

$$\frac{5\pi}{6} > \frac{5\cdot 3}{6} = \frac{15}{6} > 2$$

$$\frac{17\pi}{6} < \frac{3,2\cdot 17}{6} = \frac{54,4}{6} < 9$$

$$\frac{25\pi}{6} > \frac{25\cdot 3}{6} = \frac{75}{6} > 9.$$

Среднее трёх чисел положительно $\Leftrightarrow$ положительны хотя бы 2 числа из трёх, а это верно при

$$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty).$$

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty).$

Чистовик

9

№ 6 $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0$$

Выполним замену $tg\,x = t$, тогда

$$at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0$$

$t = 1$ подходит $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a & t-1 \\ \hline -\ at^3 - at^2 & at^2 + (1-2a^2)t - 2a \\ \quad -\ (1-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a & \\ \quad\ \ (1-2a^2)t^2 - (1-2a^2)t & \\ \hline \qquad -\ -2at + 2a & \\ \qquad\ \ -2at + 2a & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$at^2 + (1-2a^2)t - 2a = 0$$

$a = 0 \Rightarrow t = 0 \quad x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$, расстояние $d = \frac{\pi}{4}$.

$a \neq 0 \Rightarrow$ ~~$D = (1-2a^2)^2 + 8a^2$~~ $= (1+2a^2)^2$

~~$t_{1,2} = \frac{2a^2 - 1 \pm (1+2a^2)}{2a}$~~ $= 2a,\ -\frac{1}{a}$

~~$t = 2a, \quad t = -\frac{1}{a}$~~

~~Итак, получаем при $a = 0$ корней два: $t = 1$, $t = 0$~~

~~это $\Leftrightarrow$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = 0$, корня два, наим. расстояние равно $\frac{\pi}{4}$~~

~~При $a = \frac{1}{2}$, корней два: $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \operatorname{arctg}(-2)$~~

~~При $a = -1$, корней тоже два: $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-2)$~~

~~При остальных a корней будет больше, т.к. $2a = -\frac{1}{a}$ (при $a \neq 0$) $2a^2 = -1$ $\varnothing$~~

Чистовик

№6 (продолжение)

10

$t^2-(2a-\frac{1}{a})-2a=0$, $t_1=2a$, $t_2=-\frac{1}{a}$.

$t_1 \cdot t_2 = -2 < 0 \Rightarrow$ Аргументы находятся в разных четвертях и расстояние между ними больше, чем $\frac{\pi}{4}$

Ответ: $a=0$.

Чистовик

№1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$; нужно сравнить A и B

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

1) $$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$\sqrt{3}-1>0$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[2]{(\sqrt{3}-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{|\sqrt{3}-1|} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

2) $$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

Так как $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{(n+1)^2(n^2)} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, то

$$A = \left(\frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{43^2}} - \cancel{\frac{1}{44^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{44^2}} - \frac{1}{45^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2}$$

Можно сделать вывод, что число $A = 1 - \frac{1}{45^2}$ меньше 1, а следовательно меньше B.

Ответ: B