МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Серафим Михаил Владимирович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	10	10	15	15	5

Черновик 1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \qquad B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots \frac{79}{(39\cdot 40)^2}$$

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{16-4\cdot 3}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{4}} = 1$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{36} +$$

$$B \ \frac{3}{(1\cdot 2)^2} < \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \frac{1}{79}}$$

$$\frac{5+3}{15} = \frac{8}{15} + \frac{1}{7} = \frac{56+15}{15\cdot 7} \quad \frac{71}{105}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2} = \cancel{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{(a^2b^2)}} = \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2b^2}$$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = (2^2 - 1^2)$$

есть

$a = 0, t \neq 0$

$2t^2 - 2t = 0$

$t(2t-2) = 0$

$t = 0$
$t = 1$

5) $- \quad - \quad +$

$t \in (-\sqrt{3}; 1]$

$y/x = \delta$

Черновик 2

№2 $\underbrace{ab}_{:19 \text{ или } 23}$ 2021 симв

1	19	23
2	38	46
3	57	69
4	~~7~~6	92
5	95	

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}_{1}\ \cancel{8}\ 9$

2

4

$46 \to 69 \to 95 \to 57 \to 76 \to 69$

$69 \to 92 \to 23 \to 38$ тупик

Решена

№3 1036 раз

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\sqrt[11]{\frac{1}{1-x^{11}}}\right)^{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{\cancel{1}-x^{11}-\cancel{1}}{1-x^{11}}}} =$

$= \frac{\sqrt[11]{x^{11}-1}}{x}$

$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[11]{\frac{1}{1-x^{11}}-1}}{x} = \frac{\sqrt[11]{\frac{1-1+x^{11}}{1-x^{11}}}}{x} = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$

решена

$N \to N-2$

$\to \frac{3\sqrt{5}}{3}$

$3 \to 1$

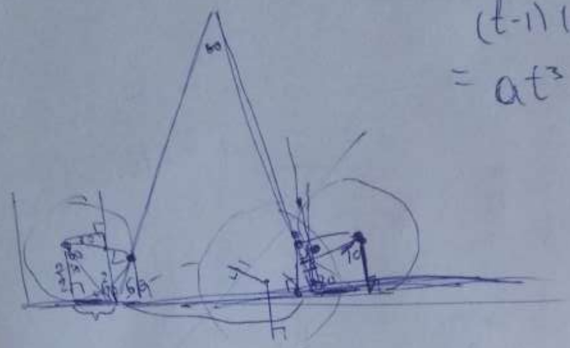
$6 \to 4 \to 1$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi$ 9

$3\pi -$ $3\pi - \frac{\pi}{6}$

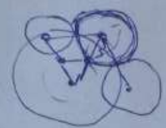
9,45 −

Черновик 3



$(t-1)(at^2+(2-a^2)t-2a)=$

$=at^3+(2-a^2)t^2-2at-at^2$



прав 17 угольник со стороной 4

решено

$(tgx-1)(tgx-a)(atgx+2)$

$atg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)tgx+2a=0$

$tgx=1$ $\quad \cancel{a}+\cancel{2}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-\cancel{2a}-\cancel{2}+\cancel{2a}$ $\qquad (t-1)(at^2+2t-a^2t-2a)$

	a	$2-a-a^2$	a^2-2a-2	$2a$
1	a	$2-a^2$	$-2a$	0

$(tgx-1)(atg^2x+(2-a^2)tgx-2a)=0$

$D=4-4a^2+a^4+8a^2=4+4a^2+a^4=(2+a^2)$

$tgx=\dfrac{-2+a^2\pm(2+a^2)}{2a}=\dfrac{-\cancel{2}+a^2+\cancel{2}+a^2}{2a}\ \dfrac{2a^2}{2a}=a$

$\dfrac{-2+a^2-2-a^2}{2a}=\dfrac{-4}{2a}=\dfrac{-2}{a}$

$(tgx-1)\,a(tgx-a)(tgx+\frac{2}{a})$

$\left[\begin{array}{l} tgx=1 \\ tgx=a \\ tgx=-\frac{2}{a} \end{array}\right.$

~~Оценка~~

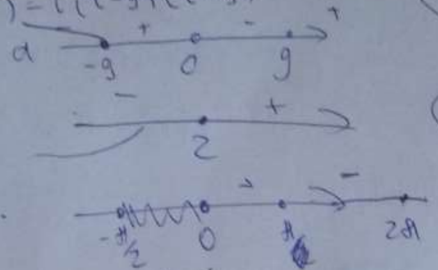
Пример: на $\frac{\pi}{4}$

Черновик 4

$a = t^3 - 81t = t(t-9^2) = t(t-9)(t+9)$

$b = 11^t - 121$

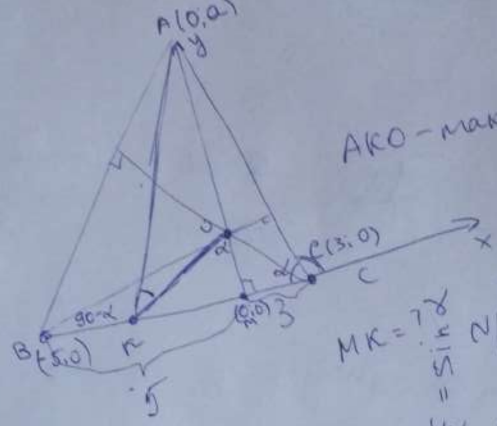
$c = \sin t - \frac{1}{2}$



max > 0

+ > 10

7



AKO – макс

$MK = \frac{7}{\sin\alpha}$

3,14

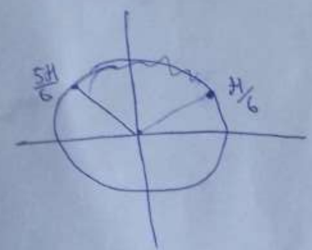
6,28

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi$

9

$3{,}14 \times 3 = 9{,}42$

$\frac{\pi}{6}$



Чистовик 1

Задача №1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{16-4\cdot 3}}{\sqrt[6]{4}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{4}} = 1.$$

B состоит из слагаемых вида $\frac{(a+a+1)}{a^2(a+1)^2} = \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2}$

Заметим, что $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 - a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{1\cdot(2a+1)}{a^2(a+1)^2}$

Тогда $B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots \frac{1}{38^2} - \frac{1}{39^2}$

$+ \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{40^2}$

Сравнивая $A = 1$ и $B = 1 - \frac{1}{40^2}$ получаем, что $A > B$.

Ответ: $A > B$

Задача №2

$23\cdot 0 = 0$
$23\cdot 1 = 23$
$23\cdot 2 = 46$
$23\cdot 3 = 69$
$23\cdot 4 = 92$
$23\cdot k > 100$ при $k \geq 5$

$19\cdot 0 = 0$
$19\cdot 1 = 19$
$19\cdot 2 = 38$
$19\cdot 3 = 57$
$19\cdot 4 = 76$
$19\cdot 5 = 95$
$19\cdot k > 100$ при $k \geq 6$

$S = \{0; 19; 23; 38; 46; 57; 69; 76; 92; 95\}$

Из условия любые две соседние цифры числа делятся на 23 или 19. Несложным перебором выше легко определить множество двухзначных чисел S, делящихся на 23 или 19 [0 соответствует $\overline{00}$]

Пусть наше число имеет вид $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_i \ldots a_{2021}}$, где a_i - цифра.

Тогда, если посмотрим на a_k, то из условия получим, что $\overline{a_k a_{k+1}}$ в точности одно из чисел множества S.

Заметим, что если $a_k = 8$, то не найдется подходящего a_{k+1}.

Если $a_k = 9$, то есть 2 варианта выбрать a_{k+1}.

В остальных случаях цепочка продолжается однозначно.

Будем строить числа как в условии задачи схематично следующим образом:

Если число $\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_{k+n}}$ подходит под условие, то построим такую цепочку

$\overline{a_k a_{k+1}} \rightarrow \overline{a_{k+1} a_{k+2}} \rightarrow \quad \rightarrow \overline{a_{k+n-1} a_{k+n}}$ при этом все числа цепочки должны $\in S$.

~~Построим такую цепочку для числа начинающегося~~

Чистовик 2

Построим такую цепочку для числа начинающегося с цифры 4.

$$46 \to 69 \to 95 \to 57 \to 76 \to 69$$
$$69 \to 92 \to 23 \to 28 \text{ тупик}$$

Таким образом, начиная со 2й цифры начнется цикл.
Наше число примет вид $4\underbrace{6957}\underbrace{6957}\ldots$

~~Тогда~~ И других вариантов построения числа нет.

Тогда цифра №1 это 4. Цифра с номером вида $2+4k$ равна 6; $3+4k$ равна 9; $4k$ равна 5, $4k+1$ равна 7 если это не первая цифра

Поскольку $2021 \equiv 1 \pmod 4$, то последней цифре в числе с номером 2021 соответствует цифра 7

Ответ: 7.

Задание №3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{1}{1-x^n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1-x^n-1}{1-x^n}}} = \frac{\sqrt[n]{x^n-1}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{1-x^n}-1}{x}} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1-1+x^n}{1-x^n}}{x}} = \frac{\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}}}{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} = f(x)$$

Значит, $f(x)$ такая, что $f(x) = f(f(f(x)))$, т.е. при вложении двух раз.

~~Тогда при вложении~~

~~Тогда $\underbrace{f(f(f\ldots(x)))}_{1306 \text{ раз}}$ Будем считать буквы f. Т.е. из 3х букв f [так $f(f(f(x))) = f(x)$] получаем 1. Т.е. за 1 цикл их кол-во уменьшается на 2~~

~~За 1 цикл кол~~

~~Теперь начнем раскрывать $\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{1306 \text{ раз}}$ изнутри.~~

~~Тогда букв f 1306 за 1 цикл их кол-во уменьшается на 2. Тогда в конце останется 4 применения функции к x~~ или

Чистовик 3

~~Задача~~ ~~$f(f(f(f(x))))$~~

Значит, при 1м применении функции к числу x получаем $f(x)$. При 2м применении $f(f(x))$. При 3м применении получаем $f(f(f(x))) = f(x)$. При $2k$ применении $f(f(x))$

При $2k+1$ применении $f(x)$.

Т.к. функцию применили 1306 раз, $= 2k$, то получим $f(f(x))$.

Тогда $f(f(2022)) = \frac{\sqrt[11]{2022^{11}-1}}{2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[11]{2022^{11}-1}}{2022}$.

Задача 5.

$a\,tg^3x + (2-a-a^2)tg^2x + (a^2-2a-2)tgx + 2a = 0$

Пусть $tgx = t$. Далее, при решении тригонометрических ур-ний предполагается что $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Тогда заметим, что $(t-1)(t-a)(at+2) = \cancel{\ldots} =$

$= \cancel{at^3 + 2t^2 - a^2t^2 - 2at - at^2 - 2t + a^2t + 2a} = (t-1)(at^2 + 2t - a^2t - 2a)$

$= \cancel{at^3 + t^2(2\ldots}$

$= at^3 + 2t^2 - a^2t^2 - 2at - at^2 - 2t + a^2t + 2a =$

$= at^3 + t^2(2-a-a^2) + t(a^2-2a-2) + 2a$ – исходное условие при $t = tgx$

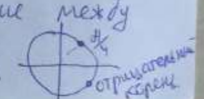
Значит, $(tgx-1)(tgx-a)(a\,tgx+2) = 0$

1) $a=0$, тогда $(tgx-1)\,tgx = 0$

$\left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{array}\right.$  $\Rightarrow$ расстояние между корнями $= \frac{\pi}{4}$

2) $a \neq 0$, тогда решением будет

$\left[\begin{array}{l} tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ tgx = a \\ tgx = -\frac{2}{a} \end{array}\right.$ Заметим, что a и $-\frac{2}{a}$ – разных знаков независимо от a. Значит, найдутся 2 корня таких, что один >0, а второй меньше 0. Но тогда расстояние между отрицательным корнем и $\frac{\pi}{4}$ будет больше чем $\frac{\pi}{4}$.



Чистовик. 4

Значит, при $a \neq 0$ ~~расстояние между~~ найдется расстояние между корнями хотя бы больше чем $\frac{\pi}{4}$.

Но при $a=0$ пример на $\frac{\pi}{4}$.

Значит, при $a=0$ расстояние между корнями минимально и равно $\frac{\pi}{4}$

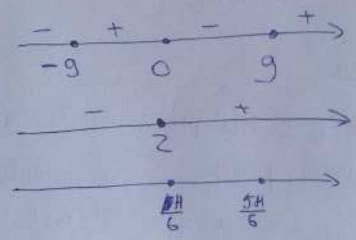
Ответ: $a=0$; расстояние между корнями принимает наименьшее значение и равно $\frac{\pi}{4}$.

Задача №5.

$a = t^3 - 81t = t(t^2-81) = t(t-9)(t+9)$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$



Заметим, что если среднее число положительно, то есть число большее него, которое тоже положительно. Если среднее число отрицательно, то ~~сред~~ меньшее число тоже отрицательно.

При этом, если среди чисел a, b, c хотя бы два положительны, то число среднее тоже положительно.

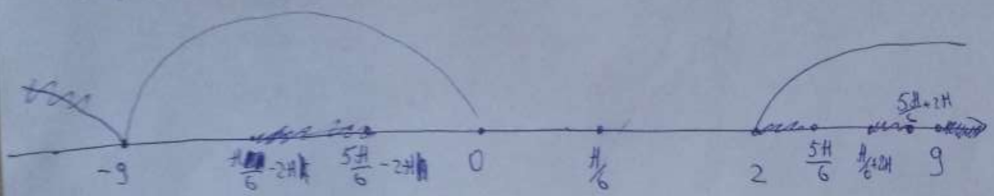
~~Значит~~ То есть для положительности среднего числа необходима положительность 2х или 3х чисел из набора $a; b; c$. Тогда ~~реш~~ решая $a>0$ $b>0$ $c>0$ определим такие интервалы, на которых найдутся 2 положительных числа.

Чистовик 5

$a > 0$ $\qquad$ $b > 0$ $\qquad$ $c > 0$

$t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$ $\qquad$ $t > 2$ $\qquad$ $t \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k)$

Изобразим все на числовой прямой



на $t < -9$ $\quad$ $a < 0$ и $b < 0$

на $t > 9$ $\quad$ $a > 0$ и $t > 0$

от $(2; \frac{\pi}{6})$ $\quad$ $c > 0$ и $b > 0$

от $(\frac{\pi}{6}+2\pi; \frac{5\pi}{6}+2\pi)$ $\quad$ $c > 0$ $b > 0$

от $(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi)$ $\quad$ $c > 0$ $a > 0$

В других промежутках нет сразу двух положительных чисел.

Если попадаем на границу, то (одно из чисел 0) необходимо, чтобы 2 оставшихся были положительными.

Таким образом не ~~включаются~~ точки включающихся границ

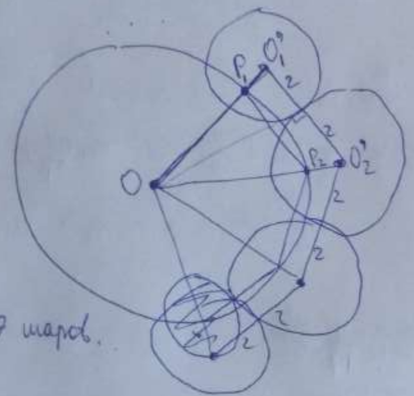
Ответ: $(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}+2\pi; \frac{5\pi}{6}+2\pi) \cup (9;+\infty)$

Чистовик #6

Задача №4.

1) Спроецируем все на плоскость основания. Получим следующий рисунок

A



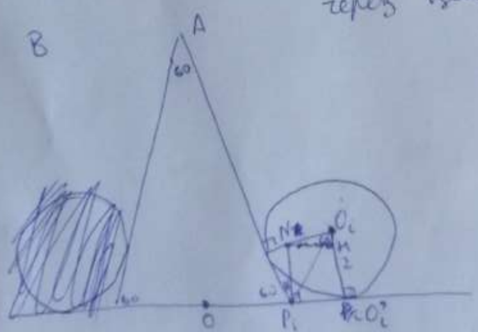
17 шаров.

Соединив их центры получим правильный 17-ти угольник со стороной 4.

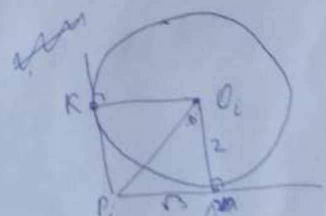
Правильный он, т.к. все картинки B (см ниже) для всех сфер одинаковы и все OO_i' будут равны.

Вид сбоку (одно из осевых сечений, проходящее через центр шара

B



Найдем P_iO_i =



$\angle OP_iA = 60° \Rightarrow \angle AP_iO_i = 120° \Rightarrow \angle KO_iP_i = \angle P_iO_iM = 30°$

Тогда $PO_i = tg30° \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Тогда на картинке A все $P_iO_i' = \frac{2}{\sqrt{3}}$

~~При этом 17-ти угольник $P_1P_2 \dots P_{17}$ при гомотетии с центром O для всех увеличение всех~~

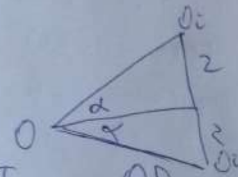
Чистовик. 7

~~Обозначим на ... перейдя в $O_1'O_2'...O_{17}'$~~

Найдем диагональ в $O_1'O_2'...O_{17}'$

$$\angle O_i O O_{i+1} = \frac{360^\circ}{17}.$$

Тогда в равнобедренном $\triangle OO_iO_{i+1}$ зная угол можно найти сторону. $OO_i = \cancel{2\sin(\frac{2\pi}{34}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{17})}$ $= \frac{2}{\sin(\frac{2\pi}{34})} = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{17})}$



$$\alpha = \frac{360^\circ}{34}$$

Тогда $OP_i = OO_i - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sin(\pi/17)}$ $\cancel{\ldots - \frac{2}{\sqrt{3}}}$ = радиусу основания

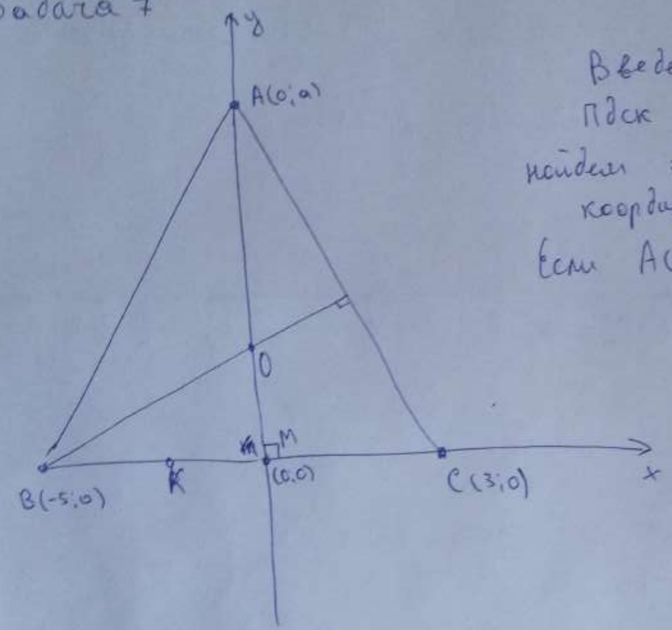
~~Ответ ... $\frac{2}{\sqrt{3}}$~~

Ответ: $\frac{2}{\sin(\pi/17)}$

см оборот

Чистовик 8

Задача 7



Введем ПДСК как на рисунке

найдем координату точки O.

Если A(0;a)

$$AC:\ y = a - \frac{a}{3}x \Rightarrow BO:\ y = c + \frac{3}{a}x \quad [\text{т.к.} \perp \text{с } AC]$$

$$0 = c + \frac{3}{a}(-5)$$

$$c = \frac{15}{a}$$

$$BO:\ y = \frac{15}{a} + \frac{3}{a}x$$

$$\begin{cases} y = \frac{15}{a} + \frac{3}{a}x \\ y = a - \frac{a}{3}x \end{cases}$$

$$a - \frac{a}{3}x = \frac{15}{a} + \frac{3}{a}x$$

$$a + \frac{15}{a} = \left(\frac{3}{a} + \frac{a}{3}\right)x$$

$$\frac{a^2+15}{a} = \frac{9+a^2}{3a}x$$

$$x = \frac{(a^2+15)\cdot 3}{9+a^2} \Rightarrow y = a - \frac{a(a^2+15)}{9+a^2}$$

Дальше зная K(k;0) ~~и~~ K∈(-5;3) несложно через скалярное произведение AK и PM промаксимизировать угол AKM. Но времени не хватило.