МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Силова Дарья Владимировна**

Класс: **7 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	0	5	15	15	20

Черновик

(10)

$\frac{1}{2012} - \frac{1}{2} =$

$\overline{abcde}$

$\frac{1011}{2022} - \frac{1}{2022} = \frac{1010}{2022}$

В идеале всего должно погореть

$7 \cdot 4 = 28$ раз цветов.

То есть за каждый ход + 3 цвета было 4 цвета и за каждый ход + 3.

Всего минимум 28.

$x(y - 2022) = y \cdot 2022$

$10a + 21b + 22c + 11d + e$

a b c d

$a+b=35$

$b+c=21$ $c+d=79$ 21 79

$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$

$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ $d \neq 0$.

$157605 = 5 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 79$

$(11 + 11)(11 + 11)(11 + 11)$

22 22 22

$157605 =$

$= 5 \cdot 3 \cdot \cancel{10507}$ $1501 \cdot 7$

$5 \cdot 31521$

$22 \cdot 22 = 484$

$484 \cdot 22 = 10648$

$157605 : 5 = 31521$

$31521 : 3 = 10507$

$1501 : 19 = 79$

$10507 : 7 = 1501$

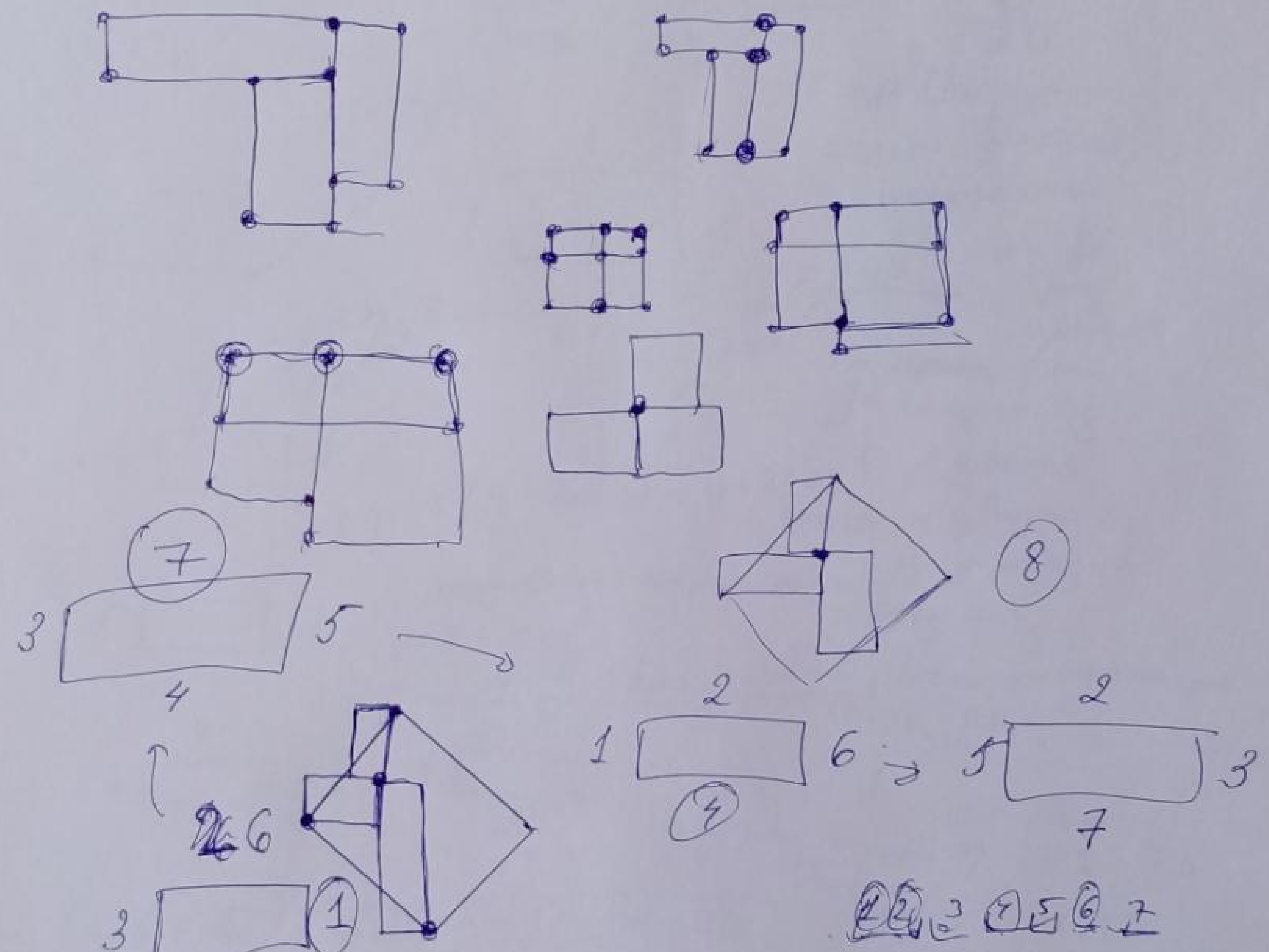
$1501 \cdot 7 = 10507$

210

Черновик.

$$\frac{1}{2022} - \frac{1011}{2022} = -\frac{1010}{2022}$$

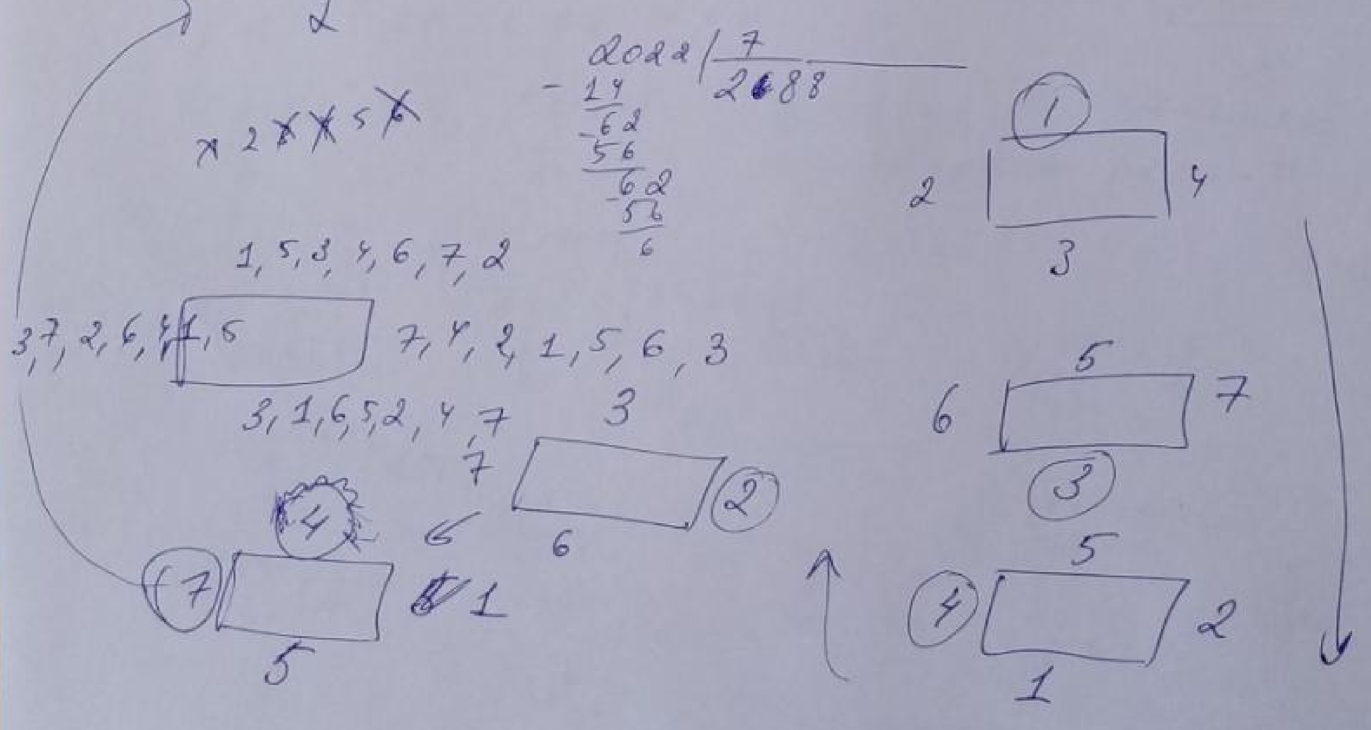
9



$$\begin{array}{r|l} 2022 & 7 \\ \hline -14 & 288 \\ 62 & \\ -56 & \\ 62 & \\ -56 & \\ 6 & \end{array}$$

x 2 x x 5 x

1, 5, 3, 4, 6, 7, 2



Чистовик

Задача 1! (1)

Допустим, штангист А поднял груз ~~такой~~ массой a, штангист Б — массой b и штангист В — массой c.

Известно, что

$a+b=220$ кг

$a+c=240$ кг

$b+c=250$ кг.

Сложим все ~~пер~~ три уравнения:

$$\begin{aligned}+\ &a+b=220\\ +\ &a+c=240\\ &b+c=250\\ \hline &2(a+b+c)=710 \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow a+b+c=355$ кг. $\Rightarrow$ $c=355-220=135$

$a=355-250=105$

$b=355-240=115.$

Наибольший груз — c, значит, победителем стал штангист В, он поднял 135 кг.

Ответ: 135 килограммов.

~~Задача 2.~~

$\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$.

$2022=\frac{xy}{x+y} \Rightarrow \underbrace{2022x}_{\vdots x}+\underbrace{2022y}_{\vdots y}=\underbrace{xy}_{\vdots x,\ \vdots y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2022y \vdots x$; $2022x \vdots y$.

$2022\cdot(x+y)=xy$

$xy \vdots 2022$

$xy \vdots (x+y)$

Есть несколько вариантов:

(1) $x>0$ $y>0$ $x \neq y$ ($x\neq 0$, $y \neq 0$, на 0 делить нельзя)

(2) $x<0$ $y>0$ или наоборот $|x|>y$, иначе $\frac{x+y}{xy}<0$, а $\frac{1}{2022}>0$ — противореч.

(3) $x=y$

$x<0$ и $y<0$ не может быть, т.к. тогда $x+y<0$, $xy>0 \Rightarrow \frac{1}{2022}<0$ — противоречие

Задача 5. Чистовик (2)

$$\overbrace{(\overline{ab}+\overline{bc})}^{x}\overbrace{(\overline{bc}+\overline{cd})}^{y}\overbrace{(\overline{cd}+\overline{de})}^{z} = 157605.$$

Разложим число 157605 на простые множители:

$157605 = 5 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 79.$

Ясно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

~~79 будет од~~.

$157605 = \cancel{a \cdot b \cdot c}\ x \cdot y \cdot z$

79 – либо x, либо y, либо z; максимальная сумма двух двузначных чисел – $99+99 = 198$, а $79 \cdot 3$ (наименьший множитель) ≥ 210.
Противоречие.

19 не может быть одной скобкой – 19 меньше суммы двух наименьших двузначных чисел – $10+10=20>19$.

$5 \cdot 3$ не могут быть в одной скобке по этой же причине – $15<20$.

Значит, либо $3 \cdot 19,\ 5 \cdot 7,\ 79$
либо $5 \cdot 19,\ 3 \cdot 7,\ 79$.

Разберемся со вторым вариантом.

$3 \cdot 7 = 21$ может быть получено только как $10+11$, значит, это z – только так e может равняться 0.

Тогда – $\cancel{(\overline{ab}+\overline{bc})}\ (\overline{ab}+\overline{b1}) \cdot (\overline{b1}+11) \cdot (11+10) = 157605.$

$\overline{b1}+11$ оканчивается на 2, но ни ~~3~~ $5 \cdot 19 = 99$, ни $3 \cdot 7 = 21$, ни 79 на 2 не оканчиваются. Значит, такой вариант невозможен.

Значит, первый вариант.

Чистовик

Задача 5 (продолжение) $\boxed{\text{Ответ: } 12345}$ 3

$(\overline{ab}+\overline{bc})(\overline{bc}+\overline{cd})\cdot(\overline{cd}+\overline{de}) = 157605.$

$3\cdot 19 = 57$; $5\cdot 7 = 35$; 79.

$57+35+79 = 2(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd})+\overline{de}$ = нечет. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overline{de}$ - нечетное, $\Rightarrow$ $\overline{cd}$ - четное, $\Rightarrow$ $\overline{bc}$ - нечетное и $\overline{ab}$ - четное.

$b \vdots 2$ $d \vdots 2$ $a \not\vdots 2$, $c \not\vdots 2$, $e \not\vdots 2$.

Допустим,

$\overline{ab}+\overline{bc} = 57$ $\Rightarrow$ $b<3$; ~~a~~ $\Rightarrow b = 2$.

$\overline{bc}+\overline{cd} = 35$

$\overline{cd}+\overline{de} = 79.$

$\overline{a2}+\overline{2c} = 57$

~~иии~~

$\overline{2c}+\overline{cd} = 35$ $\Rightarrow c = 1.$

$\overline{cd}+\overline{de} = 79$

$\overline{a2}+21 = 57,$ $2+1 = 3 \neq 7$ - ~~нет~~ противоречие.

$21+\overline{1d} = 35$ $\Rightarrow$ ~~ази~~

$\overline{1d}+\overline{de} = 79$

Допустим, $\overline{ab}+\overline{bc} = 35.$ (если мы в опровергнутом варианте поменяем 57 и 79 местами, ничего не поменяется)

$\overline{ab}+\overline{bc} = 35$

$\overline{bc}+\overline{cd} = 57$

$\overline{cd}+\overline{de} = 79.$

$b<3 \Rightarrow b = 2$; $\Rightarrow$ ~~dt~~ $a = 1.$

$12+\overline{2c} = 35 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 23+\overline{3d} = 57 \Rightarrow d = 4$

$34+\overline{4e} = 79 \Rightarrow e = 5.$ Всё хорошо,

$\boxed{\overline{abcde} = 12345.}$

Если мы поменяем 57 и 79 местами, всё будет плохо.

Попробуем, когда

$\overline{cd}+\overline{de} = 35.$

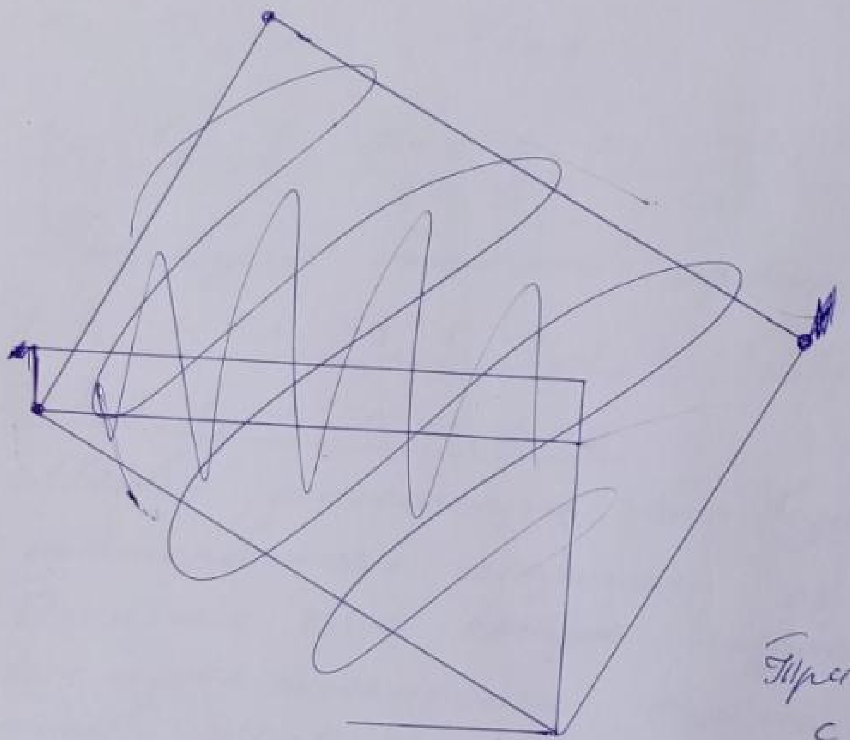
$d<3 \Rightarrow d = 2$; $\Rightarrow c = 1$; $\Rightarrow e = 35-12-20 = 3.$

$\overline{bc}+\overline{cd} = \overline{b1}+$ ~~1dd~~ $\overline{12}$ - оканчивается на 3, у нас нет числа оканчивающегося на 3. Противоречие.

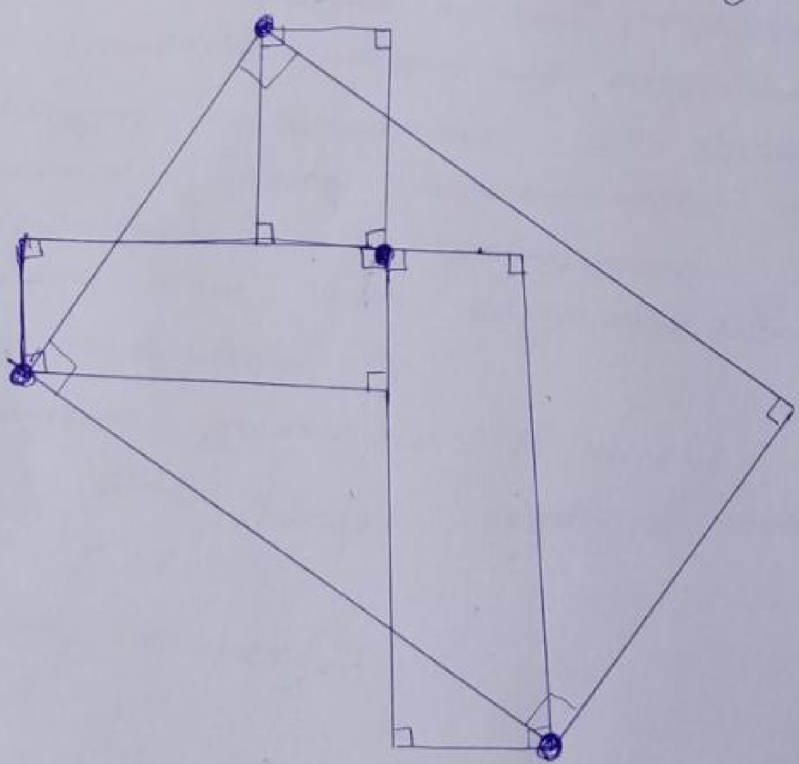
Чистовик

Задача 3.

Да, можно.



Три прямоугольника с одной общей вершиной



Чистовик. 5

Задача 4.

$x_1, x_2, x_3 \dots x_{2022}$.

$\underbrace{1}, \underbrace{1}, \underbrace{-1}, \underbrace{x_4=-1}_{1\cdot(-1)}, \underbrace{x_5=-1}_{1\cdot(-1)}, \underbrace{x_6=1}_{(-1)\cdot(-1)}, x_7=-1 \dots$

Попробуем написать первые несколько чисел:

$\underline{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1}, \underline{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1}, \underline{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1}, \underline{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1}, \dots$

Можно заметить, что возникает цикл - повторяется строчка $1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1$.

Понятно, что каждое следующее число в последовательности определяется автоматически; после каждой такой строчки обязательно будет стоять такая же строчка; если произойдут изменения и ~~вместо~~ в каком-то месте знаки поменяются, следовательно, поменяются и предыдущие знаки - но мы знаем, что они неизменяемы - они строго известны.

В каждом цикле по 7 чисел.

$2022 \underset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow x_{2022}$ - ~~шестое~~ шестое число цикла: 1.

Ответ: $x_{2022} = 1$.

Чистовик.

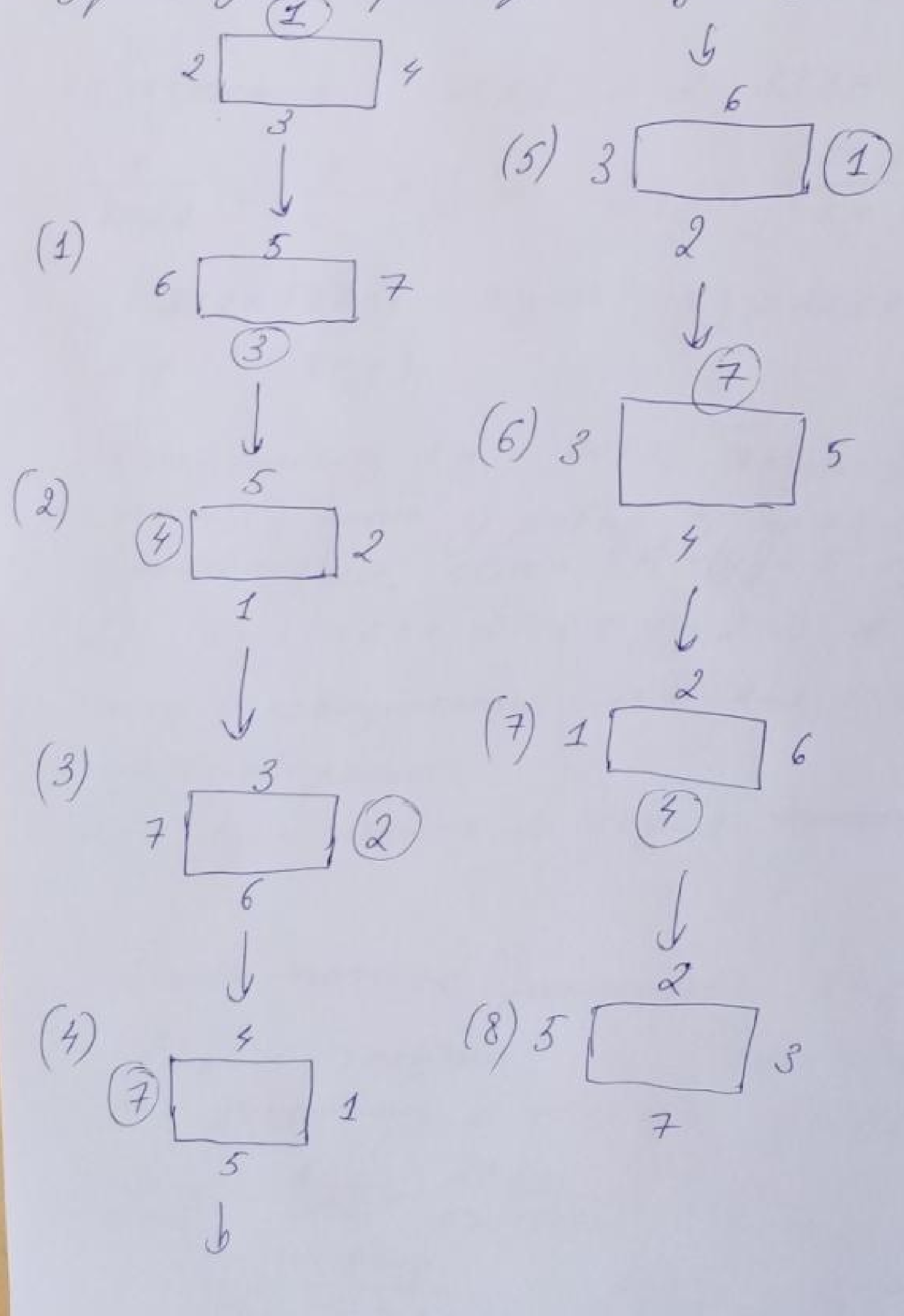
Задача 6

Всего лампочки должны в сумме погореть 28 цветами (по 7 на каждую).

За один ход добавляется по 3 цвета, значит всего минимум должно быть 8 ходов:

~~4+~~ меньше нельзя — $\underbrace{4+3\cdot 7}_{25} < 28$.

Приведём пример. Цвета — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.



Левая лампочка:
2, 6, 4, 7, 7, 3, 3, 1, 5.

Верхняя:
1, 5, 5, 3, 4, 6, 7, 2, 2.

Правая:
4, 7, 2, 2, 1, 1, 5, 6, 3

Нижняя:
3, 3, 1, 6, 5, 2, 4, 7.

Всё в порядке.

Ответ: 8.

Чистовик

2

7

~~Если (3):~~

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4044.$$

~~Если (1):~~

~~$2022(x+y) = xy$; допустим, $xy = 2022 \Rightarrow x+y=1$, тогда либо x, либо y равно 0 — на 0 делить нельзя, противоречие.~~

Задача 2. $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2022} = \frac{x+y}{xy} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2022(x+y) = xy \Rightarrow xy \vdots 2022 \Rightarrow xy \geq 2022$; $xy \vdots (x+y)$.

Допустим, $xy = 2022$. Тогда $(x+y) = 1$, значит, либо x, либо y равно 0, но на 0 делить нельзя, противоречие. Либо $||x|-|y|| = 1$, но такое тоже невозможно.

(2) $xy = 4044 \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow$ либо $||x|-|y|| = 2$, что невозможно, либо $x=1, y=1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 4044$ — противоречие.

(3) $xy = 2022 \cdot 3 \Rightarrow x+y=3$. ~~Нельзя~~. Невозможно.

⋮

Есть точное решение: $x=y=4044$.

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{4044} + \frac{1}{4044}.$$

Если $x < 4044$, допустим, $x = 4043$, то $y > 4044$ —

$$\frac{1}{2022} - \frac{1}{4043} = \frac{2021}{2022 \cdot 4043} < \frac{1}{4043}; \quad y \geq 4045. =$$

$$= \frac{2022 \cdot 4043}{2022 \cdot 4043 \cdot 4045}; \quad \frac{2021}{2022 \cdot 4043} = \frac{2021 \cdot 4045}{2022 \cdot 4043 \cdot 4045}.$$

Задача 2, продолжение. Чистовик.

8

$2022 \cdot 4043 = 2020 \cdot 4040 + 2 \cdot 4043 + 3 \cdot 2022.$

$2021 \cdot 4045 = 2020 \cdot 4040 + 1 \cdot 4045 + 5 \cdot 2021.$

$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 4043 = 8086 \\ 3 \cdot 2022 = 6066 \end{array}\right\} 14152$

$\left.\begin{array}{l} 4045 \cdot 1 = 4045 \\ 5 \cdot 2021 = 10105. \end{array}\right\} 14150$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2022} - \underbrace{\frac{1}{4043}}_{\text{минимум}} > \underbrace{\frac{1}{4045}}_{\text{максимум}}.$$

т.е. если мы будем увеличивать ~~у~~ у и уменьшать x, всё равно $\frac{1}{2020} - \frac{1}{x}$ будет больше, чем $\frac{1}{y}$ и равновесия не будет.

Даже если x уйдёт в минус (оно целое, так что такое быть может).

Аналогично будет, если мы поменяем x и y местами.

Получаем, что решение только одно — $x = 4044$, $y = 4044$.

Ответ: 1.