МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ситкина Алена Николаевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	15

ЧИСТОВИК

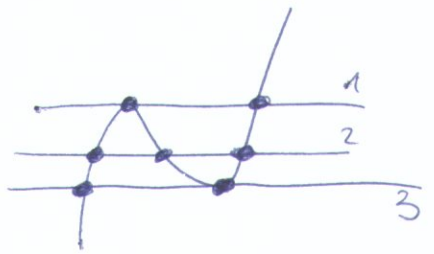
№6

пусть $y = ctg\, x$

$f(y) = ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a$

если $a \neq 0$, то $f(y)$ – многочлен 3 степени от y, где $y \in \mathbb{R}$.

$f'(y) = 3ay^2 + 2(2a^2 - a - 2)y + (2 - 4a - 2a^2)$



$D = 4(2a^2 - (a+2))^2 - 4 \cdot 3a \cdot (2 - 4a - 2a^2) =$

$= 4(4a^4 - 4a^2(a+2) + a^2 + 4a + 4) - 4(6a - 12a^2 - 6a^3) =$

$= 4(4a^4 - 4a^3 - 8a^2 + a^2 + 4a + 4 - 6a + 12a^2 + 6a^3) =$

$= 4(4a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 2a + 4)$

необходимо, чтобы ~~раз~~ модуль разности максимального и минимального корней был минимально возможным. из картинки выше видно, что это достигается в 1 или 3 случае (т. е. когда один из экстремумов является корнем уравнения).

пусть ~~х~~ y_1, y_2 – экстремумы.

$$y_{1,2} = \frac{-2(2a^2 - a - 2) \pm \sqrt{D}}{6a}$$

~~$f(y_1) f(y_2)$~~ $f(y_1) f(y_2) = 0$.

ЧИСТОВИК

№7 (продолжение)

$\angle BHA = \angle BMA = 90° \Rightarrow ABMH$ вписанный

$\Rightarrow \angle MBH = \angle MAH$ (опираются на одну дугу). Пусть $\angle MBH = \angle MAH = \beta$.

$$tg\,\beta = \frac{MO}{BM} = \frac{MC}{MA}$$

(1-ое получено из ΔBMO, второе – из ΔAMC).

Отсюда:

$$\underbrace{MO \cdot MA}_{MK^2} = BM \cdot MC$$

(по условию $BM = 5$
$MC = 3$)

$$MK^2 = 5 \cdot 3 = 15$$

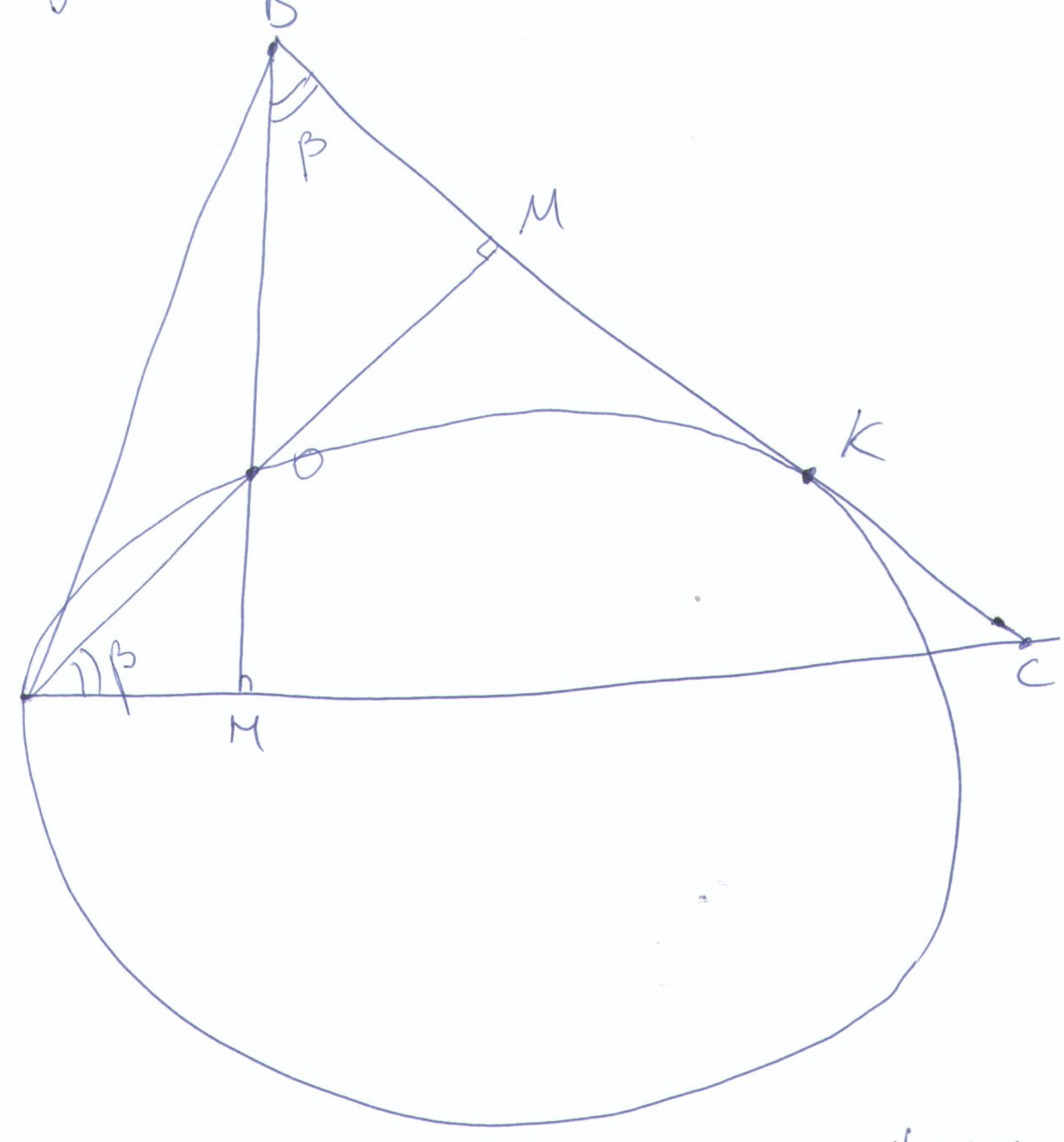
$$MK = \sqrt{15}$$

Ответ: $\sqrt{15}$.

ЧИСТОВИК 10

№7

Опишем окружность вокруг $\triangle AKO$. Пусть $\angle AKO = \alpha$. Тогда по теореме синусов $2R = \frac{AO}{\sin\alpha}$ (R - радиус окружности). Если α максимален, то R минимален $\Rightarrow$ окружность касается отрезка BC (в точке K).



пусть $BH \perp AC$ - высота. ~~Пош~~

Посчитаем степень точки M относительно проведённой окружности двумя способами: $MK^2 = MO \cdot MA$.

ЧИСТОВИК

№1 (продолжение)

Таким ~~обра~~ образом получаем:

$$B = 1 - \left(\frac{1}{60}\right)^2 < 1 = A$$

Ответ: $A > B$.

ЧИСТОВИК

№4 (продолжение).

$R - r = A_1 B_1$

$r = R - A_1 B_1$

$r = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

ЧИСТОВИК

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{1^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$B = \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Докажем по индукции ~~формулу~~ формулу

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

база: $k=1$

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

переход: $k \to k+1$

необходимо проверить, что

$$1 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + \frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \left(\frac{1}{k+2}\right)^2.$$

$$\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2-(k+1)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}$$

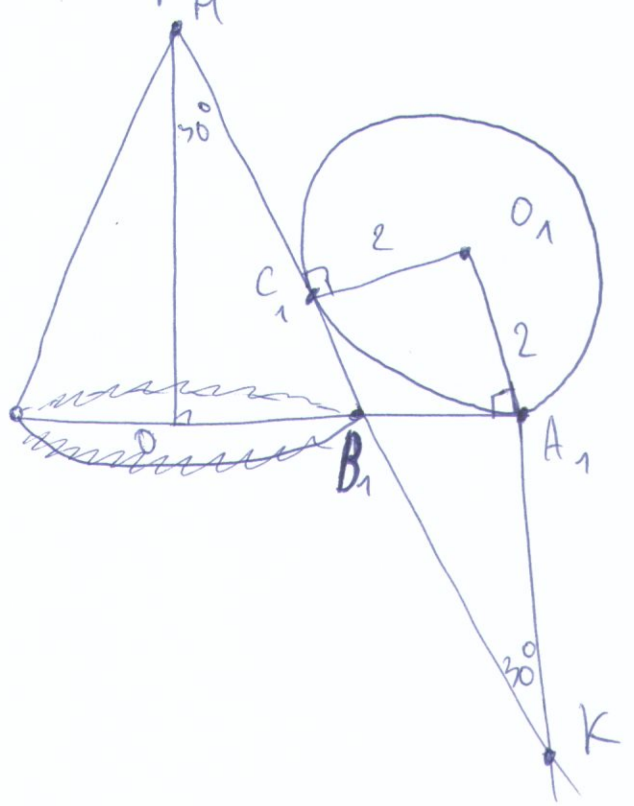
$$(k+2)^2-(k+1)^2 = k^2+4k+4-k^2-2k-1 = 2k+3 =$$

$$= 2(k+1)+1$$

формула доказана.

ЧИСТОВИК

№4 (продолжение)



Рассмотрим теперь плоскость пересечения OA_1 и HB_1 (H - вершина конуса, HB_1 - образующая, $B_1 \in$ основанию). Ясно, что параллельные прямые HO и O_1A_1 ~~и~~ также принадлежат этой плоскости. Пусть $HB_1 \cap O_1A_1 = K$. По условию $\angle(OH, HB_1) = 30^\circ = \angle(HB_1, O_1K)$. ~~Откуда по т. Пифагора для $\triangle O_1C_1K$ и $\triangle$~~

Откуда из соотношений в прямоугольном треугольнике и теоремы Пифагора получаем: $O_1K = 4$, $A_1K = 2$, $A_1B_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (касательная и радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярны)

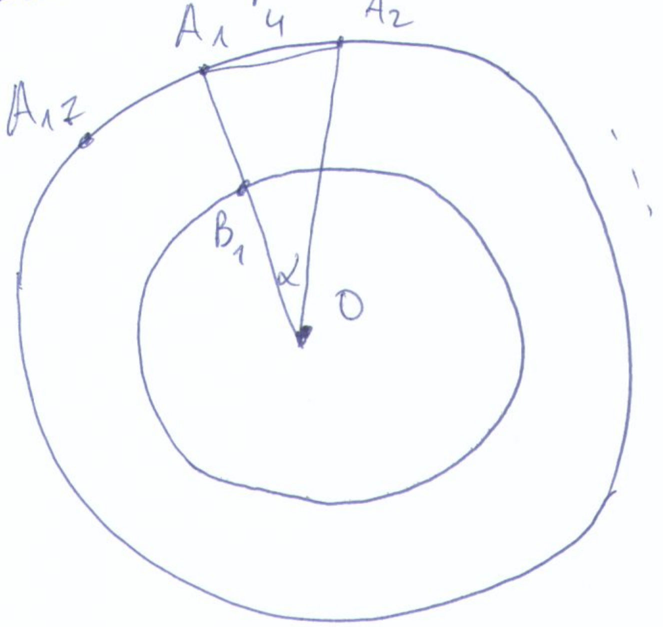
Возвращаясь к плоскости основания, получаем:

ЧИСТОВИК

№4

Расстояние между центрами касающихся шаров равно $2+2=4$

Рассмотрим плоскость основания конуса.



O – проекция вершины конуса.

$A_1, A_2 \dots A_{17}$ – точки касания плоскости и шаров.

Очевидно, $A_1A_2\dots A_{17}$ – правильный 17-угольник, ~~и~~ центр описанной окружности которого совпадает с точкой O

~~$A_1 = \Delta$~~ $A_1A_2 = 4$ т.к. шары равны и их радиусы равны 2

Пусть $\angle A_1OA_2 = \alpha$, радиус основания конуса r, радиус описанной окружности $A_1\dots A_{17}$ R.

По теореме синусов $\frac{4}{\sin \alpha/2} = 2R$

$\alpha = \frac{2\pi}{17}$; $R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}}$

Чистовик

№5 (продолжение).

$\frac{2\pi}{3} > 0$

$-12 < \frac{2\pi}{3} - 2\pi < 0$

$-12 < \frac{2\pi}{3} - 4\pi < 0$

$\frac{2\pi}{3} - 6\pi < -12$

$\frac{\pi}{3} > 0$

$-12 < \frac{\pi}{3} - 2\pi < 0$

$-12 < \frac{\pi}{3} - 4\pi < 0$

$\frac{\pi}{3} - 6\pi < -12$

введём обозначения:

$x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi$ $\quad z = \frac{\pi}{3} - 2\pi$

$y = \frac{2\pi}{3} - 4\pi$ $\quad q = \frac{\pi}{3} - 4\pi$

(эти обозначения применены на рисунке выше).

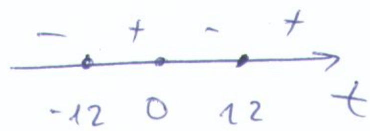
Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{2\pi}{3} - 4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi\right) \cup$

$\cup \left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$.

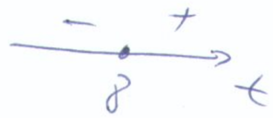
Чистовик.

№5

$a(t) = t^3 - 144t = t(t-12)(t+12)$



$b(t) = 2^t - 256$

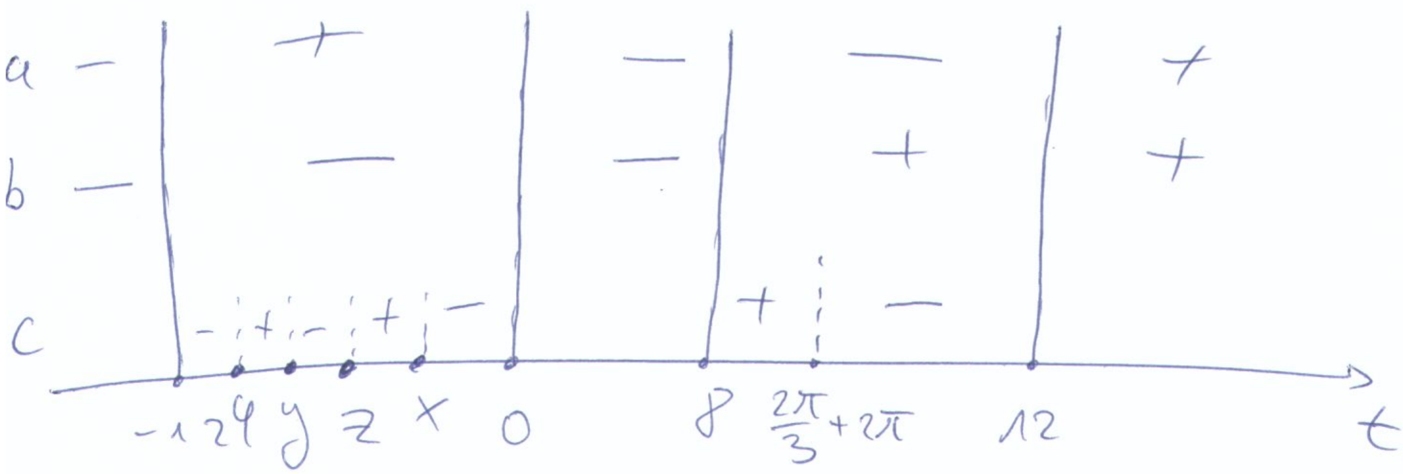


$c(t) = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

нули: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

(здесь и далее $n \in \mathbb{Z}$).

Среднее из трёх чисел положительно ⇔
⇔ хотя бы 2 числа в наборе положительны



$(-\infty; -12] \cup [0; 8]$ — не подходят
$(12; +\infty)$ подходит.

$12 > \frac{2\pi}{3} + 2\pi > 8$

$\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 14$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi < 8$

$\frac{\pi}{3} + 4\pi > 12$

$\frac{2\pi}{2} < 8$

на промежутках
$(-12; 0)$ и $(8; 12]$
отметим знаки $c(t)$

— на $(8; 12]$ есть только один корень $c(t)$, из монотонности получаем знаки, указанные выше.

~~#~~ ЧИСТОВИК

2

№2 (продолжение)

Таким образом, мы привели пример таких чисел, удовлетворяющих условию и нашему ответу, и доказали, что других вариантов нет.

№3

$$f(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \sqrt[7]{x^7} = x$$

$$1304 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(f(\ldots f(2022)\ldots)}_{1304 \text{ раз}} = f(f(2022)) =$$

$$= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

ЧИСТОВИК

1

№2

Ответ: число может заканчиваться на цифры 6 или 8.

Выпишем все двузначные числа, кратные 19 или 23.

$19\cdot1=19$	$23\cdot1=23$
$19\cdot2=38$	$23\cdot2=46$
$19\cdot3=57$	$23\cdot3=69$
$19\cdot4=76$	$23\cdot4=92$
$19\cdot5=95$	

Заметим, что среди этих чисел нет ни одного, которое начинается на 8 и есть два (92 и 95), которые начинаются на 9.

Понятно, что если число начинается на 4, то следующие его цифры — 6 и 9. Далее могут идти цифры 2 или 5. В разных случаях мы получаем две ситуации:

1) 4695769...

2) 469238

Заметим, что во 2-ой ситуации дальше число продолжить с сохранением указанного св-ва мы не можем.

Далее, назовём в нашем числе блоком цифры, расположенные между двумя цифрами 9 (вкл. 1-ую, не вкл. 2-ую).

$2022-2=2020=4\cdot505 \;\vdots\; 4$

Из сказанного ранее и из того, что $2020 \;\vdots\; 4$, очевидно, как именно устроено наше число:

$$46\underbrace{\underline{9576}\,\underline{9576}\ldots\underline{9576}}_{504\text{ раза}}9abc$$

$\overline{abc}$ — три подряд идущие последние цифры числа. Ясно, что ~~из~~ $\overline{abc}=576$ или $\overline{abc}=238$

ЧЕРНОВИК. $\boxed{13}$

$$1 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + \frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \left(\frac{1}{k+2}\right)^2$$

$$\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2-(k+1)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}$$

$$(k+2)^2 - (k+1)^2 = \cancel{k^2} + 4k + 4 - \cancel{k^2} - 2k - 1 =$$

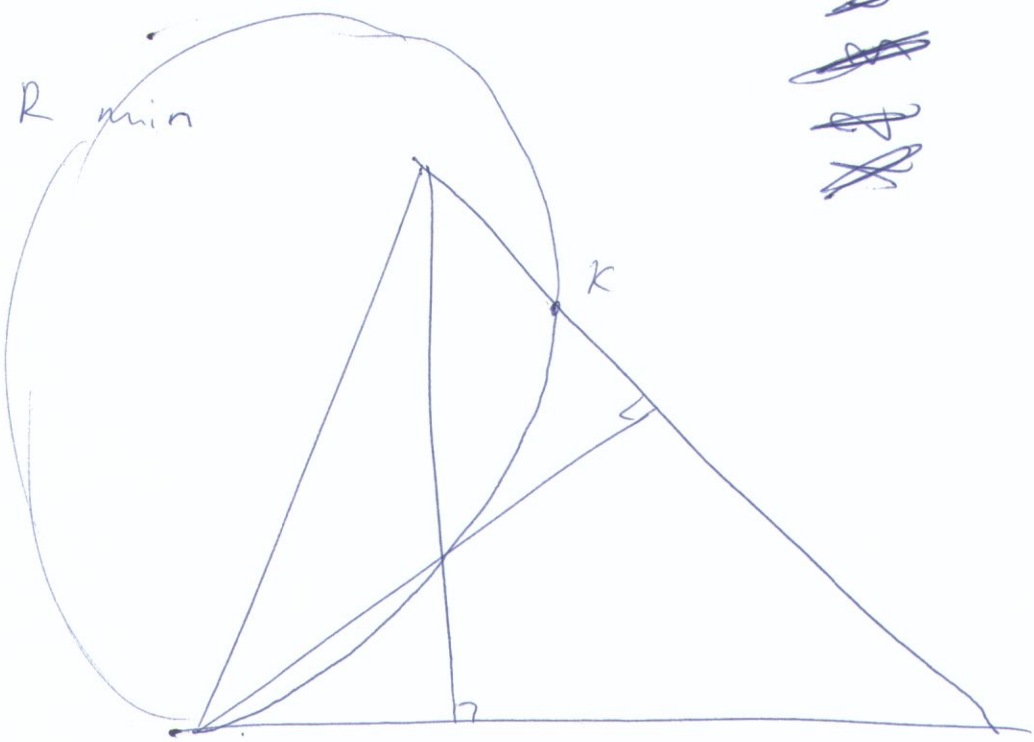
$$= 2k+3$$

$$\frac{AO}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{AO}{2R} = \sin\alpha$$

max max

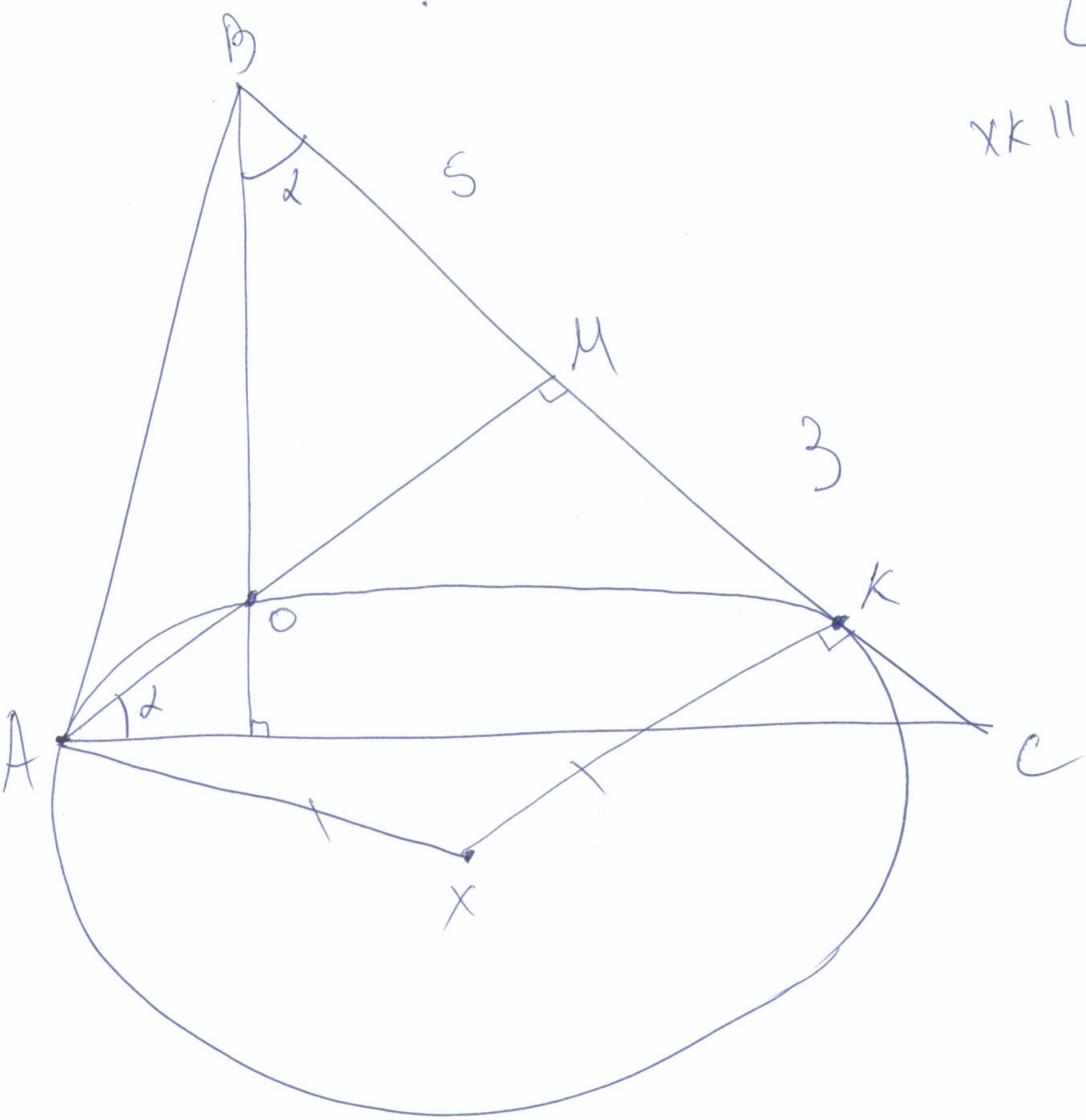
R min



черновик.

14

$XK \parallel AM$



$MK^2 =$
$= AX^2 - (AM - XK)^2 = R^2 - (AM - R)^2 = -AM^2 + 2AM \cdot R$

$MK^2 = 2AM \cdot R - AM^2$

$MK^2 = \cancel{MO \cdot AO}\ MO \cdot MA$

$\cancel{tg\,\alpha = MO}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{MO}{5} = \frac{3}{MA} \Rightarrow MO \cdot MA = 3 \cdot 5.$

черновик

1Б

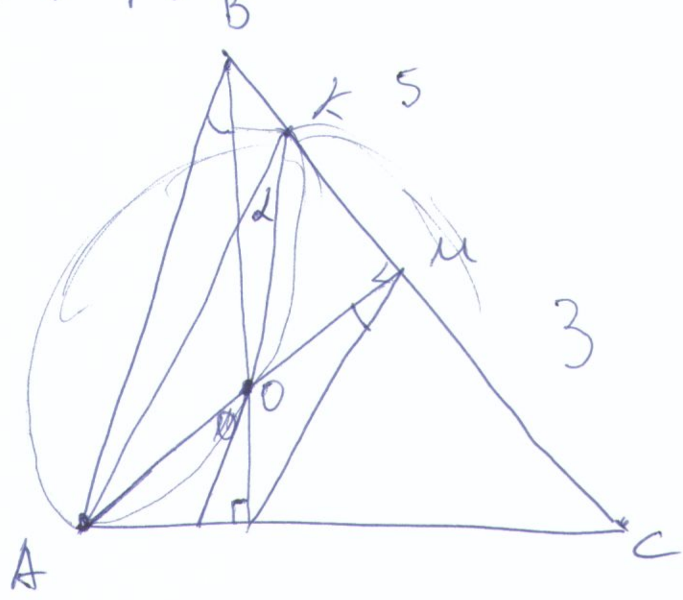
$2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{x^2-1}{x^2}}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1}{x^2}}} = 2\sqrt{x^2} = 2x$

~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~

MK?

$BM = 5$

$MC = 3$



$\sqrt{16-4}$

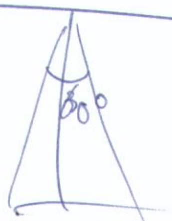
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\frac{4}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$

$\frac{10}{\sin\alpha} = 2R$

$2R = \frac{4}{\sin\frac{\pi}{17}}$

∠(ось, образующая) = 30°



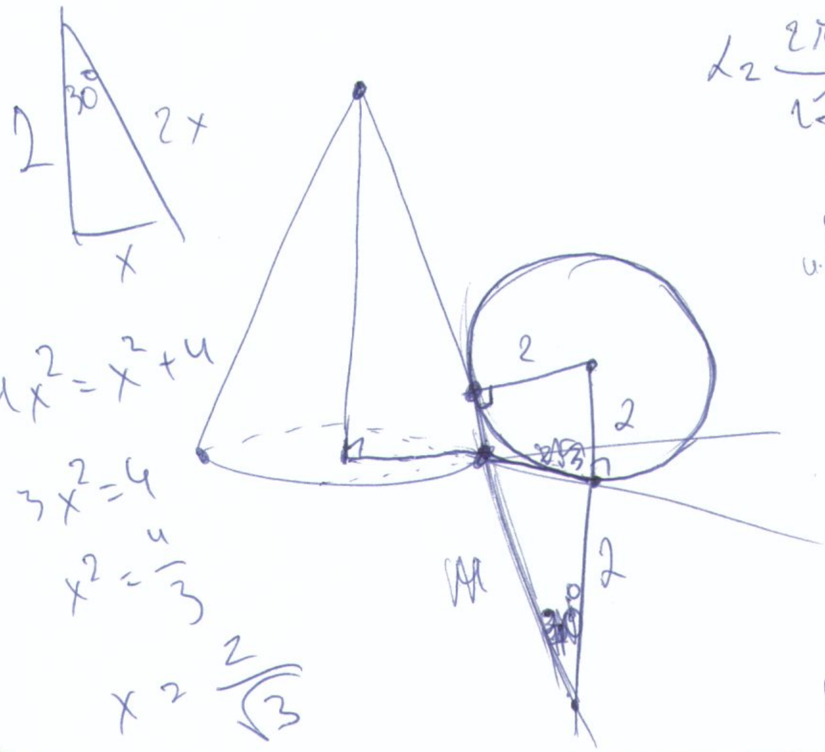
$\alpha = \frac{2\pi}{17}$

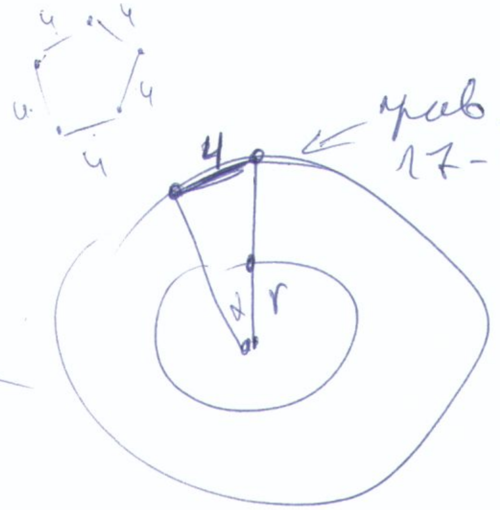
$4x^2 = x^2 + 4$

$3x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$



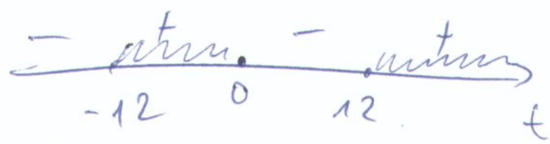


прав. 17-угольник

$R - r = 2\sqrt{3}$

$a = t^3 - 144t = t(t-12)(t+12)$

$r = R - 2\sqrt{3} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - 2\sqrt{3}$



ЧЕРНОВИК

16

$f(y) = 2ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a = 0$

$f'(y) = 3ay^2 + 2(2a^2 - a - 2)y + (2 - 4a - 2a^2)$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{56^2} + \frac{9}{(90)^2}$

$(4\cdot 3)^2$

$\frac{x+y}{(xy)^2}$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\frac{x+y}{(xy)^2}$

$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{2xy}{x+y}$

$\frac{1}{\cancel{4}} - \frac{5}{36} = \frac{1}{\cancel{4}}\left(1 - \frac{5}{\cancel{12}9}\right) = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$

$(59!)^4 \cdot 60^2 > 3 \cdot \frac{k}{4^2} + 5 \cdot \frac{k}{(2\cdot 3)^2}$

k

$1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$

$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2$

$1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \sum$

Черновик.

17

$$1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$$

база очев.

$$\cancel{1}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\frac{2(k+1)+1}{k^2(k+1)^2} \geq \cancel{1}-\left(\frac{1}{k+2}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{2k+3}{k^2}}$$

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\left(\frac{2(k+1)+1}{k^2}-1\right) \geq -\left(\frac{1}{k+2}\right)^2$$

$$\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 \geq 1-\frac{2(k+1)+1}{k^2}=\frac{k^2-2k-3}{k^2}=\frac{(k-1)^2-4}{k^2}=$$

$$=\frac{(k-3)(k+1)}{k^2}$$

$$\frac{k+1}{(k+2)^2} \geq \frac{k-3}{k^2}$$

$$k^3+k^2 \geq (k-3)(k^2+4k+4)=k^3+4k^2+4k-3k^2-12k-12$$

$$k^3+k^2-8k-12$$

черновик

18

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{1^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 1\cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} \quad ?$$

$$\sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{3\cdot 3^2+5}{36} =$$

$$= \frac{32}{36}$$

$$2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3} - \sin\frac{\pi}{17}}{\sqrt{3}\cdot \sin\frac{\pi}{17}}\right)$$

$$\frac{1}{9}\left(1 - \frac{7}{16}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{16}$$

черновик.

19

у и 7

у 7

$\frac{2\pi}{3} - 4\pi < \frac{\pi}{3} - 2\pi$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi < -2\pi$

$\frac{\pi}{3} - 2\pi < 0$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi > -12$

$\pi\left(\frac{4\cdot 3 - 1}{3}\right)$

$\cancel{4\pi < 2}$ ″

$\pi\left(4 - \frac{1}{3}\right) < 12$

$\cancel{\pi \cdot \frac{11}{12} < 12}$

$\cancel{\pi < 144}$

$\cancel{11\pi < 144}$

$\pi \cdot \frac{11}{3} < 12$

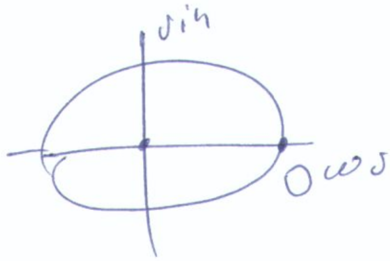
$\pi \cdot 11 < 36$

$\pi < 3 + \frac{3}{11}$

$$\begin{array}{r|l} 30000 & 11 \\ -22 & \overline{0,2} \end{array}$$

$\frac{3}{11} > \frac{2}{10}$

$30 > 22$

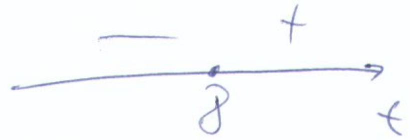


$\sin(0) = 0$

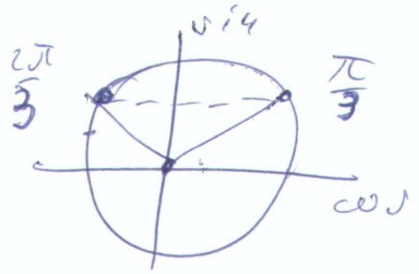
Черновик

120

$b = 2^t - 256$



$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin \frac{\pi}{3}$

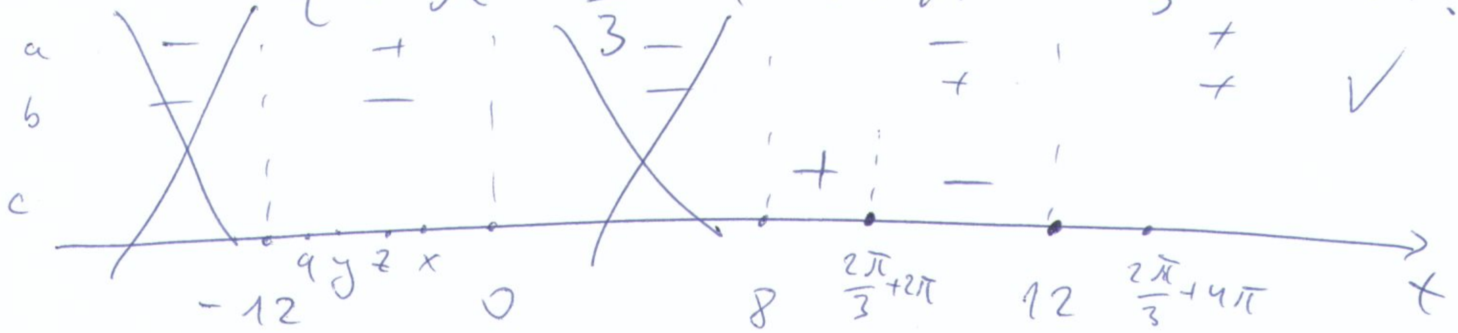


$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$



$n=1 \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cancel{n} > 2+6 = 8$

$n=2 \quad \frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2+12 = 14$

$1-12=-11$

$\boxed{\text{12 не подходит}}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$8 > \frac{\pi}{3} + 2\pi$ ~~$> 1+6 = 7$~~

$\frac{\pi}{3} + 4\pi \approx 1 + 12 > 12$

$y > 9$

$x > z > 9$

$x > z > y > 9$

$2-6$

$1-6$

$2-12=-10$

$1-12$

черновик

21

$$f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{\cancel{x^7}-\cancel{x^7}+1}{x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{1}{x^7}}} = x$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(x)$$

$$f(f(f(x))) = x$$

1304

$$1000 \overset{3}{\equiv} 1000 - 999 \overset{3}{\equiv} 1$$

$$1300 \overset{3}{\equiv} 1000 \overset{3}{\equiv} 1$$

$$1304 \overset{3}{\equiv} 1300 + 4 \overset{3}{\equiv} 1 + 4 \overset{3}{\equiv} 5 \overset{3}{\equiv} 5 - 3 = 2.$$

$$\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}}$$

$$\sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{\cancel{1}-x^7-\cancel{1}}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}$$

черновик

$\boxed{22}$

$19 \times 2 = 38$, $19 \times 3 = 57$, $19 \times 4 = 76$, $19 \times 5 = 95$

$23 \times 2 = 46$, $23 \times 3 = 69$, $23 \times 4 = 92$

19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95

19, 23, 38, 57, 76, 95, 46, 69, 92

46,9576,9

469238?

$2022 - 2 = 2020$

$2020 : 4 = 505$

$505 \times 4 = 2020$

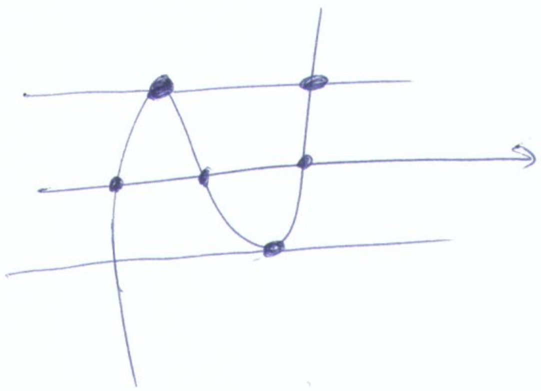
$$f(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{\cancel{1}-x^7-\cancel{1}}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}$$

ЧЕРНОВИК

$$f(y) = ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a = 0$$

$$f'(y) = 3ay^2 + 2(2a^2 - a - 2)y + (2 - 4a - 2a^2) = 0$$



4

$2(1 - 2a - \cancel{2}a^2)$

4

$-2(a^2 + 2a - 1)$

4

$-2(a+1)^2 + 4$