МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сметанин Григорий Александрович**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	10	15	10	10	0	0

Чистовик лист 1

№1. Обозначим искомое число за x. Тогда выполняются равенства:

$$\begin{cases} x=20t+a \\ x=21k+a+1 \\ x=22f+2 \end{cases}$$, где ~~a~~, $t,k,f \in N$; $a \in Z$; $a \geq 0$; $a<20$

$$20t+a=21k+a+1$$

$$t=\frac{21k+1}{20} \Rightarrow (21k+1) \vdots 20$$

$$(k+1) \vdots 20$$

при $k=19 \Rightarrow t=\frac{21\cdot 19+1}{20}=20$

$$x=400+a=22f+2$$

$$f=\frac{398+a}{22}=18+\frac{2+a}{22} \Rightarrow a=20 \quad W \Rightarrow$$

$$k=19+20=39 \Rightarrow t=\frac{21\cdot 39+1}{20}=\cancel{21+20=40}\ 21+20=41$$

$$x=820+a=22f+2$$

$$f=\frac{818+a}{22}=37+\frac{a+4}{22} \Rightarrow a=18$$

при $x=820+18=\underline{838}$ Ответ: 838

№2.

Каждая из трёх подвижных вершин пирамиды побывает в каждом из трёх положений (1, 2, 3) на рис 2 ровно 2 раза и пройдёт один и тот же путь.

вид на стол сверху:

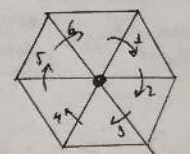


рис 1

Рассмотрим все три перехода по отдельности. При переходе (1 → 2) точка A перейдёт в точку E. т.е (ABC) перейдёт в (EBC). Движение точки E

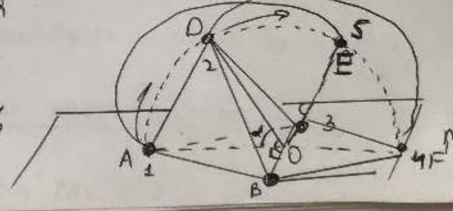


рис 2

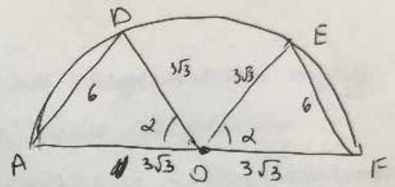
Чистовик лист 2

будет происходить в плоскости AEO, где O – середина BC (т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle BEC$ – равностор., то $EO \perp BC$ и $AO \perp BC$)

Длина траектории $A \to E$ равна длине дуги $\breve{AE}$ окружности с центром в (.) O. $\breve{AE} = 180^\circ - \alpha$, (если обозначить $\angle AOD$ за α, то $\angle EOF$ будет тоже $= \alpha$)

$\alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

Длина $\breve{AE} = \left(\pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 6$



2→3 при переходе $2 \to 3$ на рис 2 точка $D \to F$ и, следовательно, пройдет такой же путь т.к. длина $\breve{DF} =$

$= $ длина $\breve{AE} = \left(\pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 6$

3→1 при переходе $3 \to 1$ на рис 2 точка $C \to C$ (неподвижна) $\Rightarrow$ путь будет равен 0.

В сумме длина траектории будет составлять:

$$2 \cdot \left(2 \cdot \left(\pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 6 + 0\right) = \underline{24\pi - 48\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}} \text{ см}$$

Ответ: $24\pi - 48\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

N3.

$$9^{2022} = (10-1)^{2022} = \underbrace{10^{2022} - 10^{2021} \cdot C_{2022}^{1} + 10^{2020} \cdot C_{2022}^{2} + \ldots - 10^{3} \cdot C_{2022}^{2019}}_{\vdots 10^3} + 10^2 \cdot C_{2022}^{2020} - 10 \cdot C_{2022}^{2021} + 1 =$$

$(n, k, t \in \mathbb{N})$

$$= n \cdot 10^3 + 10^2 \cdot C_{2022}^{2} - 10 \cdot C_{2022}^{1} + 1 = n \cdot 10^3 + 100 \cdot \frac{2022!}{2020! \cdot 2!} -$$

$$- 10 \cdot \frac{2022!}{2021! \cdot 1!} + 1 = n \cdot 10^3 + 100 \cdot 2021 \cdot 1011 - 10 \cdot 2022 + 1 =$$

$$= \underbrace{n \cdot 10^3 + 100 \cdot 2021 \cdot 1010 + 100 \cdot 2020 - 10 \cdot 2000 - 1000}_{\vdots 1000} +$$

$$+ 100 \cdot 1 - 10 \cdot 22 + 1 + 1000 = k \cdot 10^3 + 881 \Rightarrow$$

Чистовик   лист 3

$\Rightarrow 10^{2021} - 9^{2021} = t \cdot 10^3 + 1000 - 881 = t \cdot 10^3 + 119$

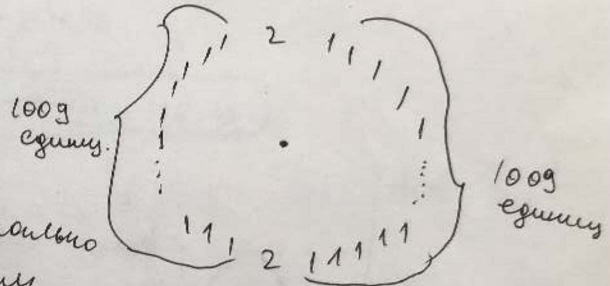
Ответ: 119.

№4.

Игрок проигрывает, если после его хода противник может составить 4. Выиграет 2-ой игрок.

Стратегия:

1-ым своим ходом второй игрок соединяет пару единиц, противоположную той, что соединил первый. Таким образом получаем следующую расстановку:



~~Далее~~ Следующими ходами 2-ой игрок повторяет ходы 1-го, соединяя пары, ~~находящиеся~~ диаметрально противоположные тем, что соединил 1-ый, до тех пор, пока у 1-го не останутся две соседние двойки или тройка и единица. Тогда 2-ой соединит эту пару и выиграет.

1-му придется в какой-то момент игры составить 2 2 или 3 1. Т.к.:

∃ 1-ый не может составить двойку из пары единиц, т.к. иначе получатся 2 двойки рядом. При этом каждая из уже ∃ двоек окружена с двух сторон единицами. Тогда 1-му придется соединить 1 и 2 и ~~тогда~~ он получит пару 1,3 и проиграет:

$2 - 1 - 1 . \underbrace{\boxed{1\ 2}}_{3}\ 1 . 1 . 2 \ldots$ Ответ: да, второй.

Чистовик. лист 4

№5.

$$x^3+4x^2+4x+a=0$$
$$y^3+4y^2+4y+a=0$$
$$z^3+4z^2+4z+a=0$$

$$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32$$

$$A=-4(x^2+y^2+z^2+x+y+z)+32-a$$

По т. Виета:

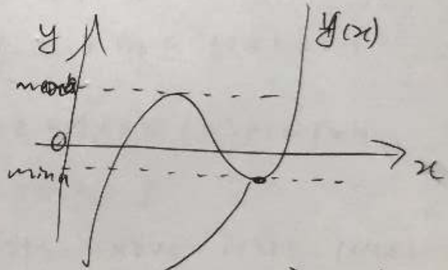
$$xy+yz+xz=4$$
$$x+y+z=-4$$
$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=16$$

$$x^2+y^2+z^2=16-2\cdot 4=8$$

$$\boxed{A=-4(8-4)+32-a=16-a}$$

график вида:

a двигает график по ординате. min a



min a при $a=0$ т.к.

$$t^3+4t^2+4t=\underbrace{(t+2)^2}\cdot t$$

] b двойной корень

~~max a при a=~~

$$\begin{array}{l|l} t^3+4t^2+4t+a & t^2-2tb+b^2 \\ \underline{t^3-2t^2b+b^2t} & \overline{t+4+2b} \\ (4+2b)t^2+(4-b^2)t+a & \\ (4+2b)t^2-2b(4+2b)t+(4+2b)\cdot b^2 & \end{array}$$

$$4-b^2+4b^2+8b=0$$
$$3b^2+8b+4=0$$
$$(b+2)(3b+2)=0$$

$$a=(4+2b)b^2$$
$$b=-\frac{2}{3}$$
$$a=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{32}{27}\Rightarrow$$

Ответ:

$$A\in\left[14\tfrac{22}{27};16\right]$$

Чистовик лист 5

N7.

число пакетов	число вариантов
1	$n_1=1$
2	$n_2=1$
3	$n_3=2$
4	$n_4=4$
5	$n_5=9$
6	$n_6=18$
7	
8	
9	
10	

для n пакетов внутри нужно составить комбинации из n-1 пакетов =>

для 4: $3 = 3\times1 = 1\times2+1 = 1\times3 \Rightarrow$

$n_4 = n_1\cdot n_1\cdot n_1 + n_2\cdot n_1 + n_3 = 1+1+2=4$

для 5: $4 = 4\times1 = 1\times2+2 = 2\times2 = 1\times3+1 = 1\times4$

$n_5 = 1+1+1+2+4 = 9$

для 6: $5 = 5\times1 = 1\times2+3 = 2\times2+1 = 1\times3+2 = 1\times4+1 = 1\times5$

$n_6 = 1+1+1+2+4+9 = \cancel{18}\ 20$

для 7: $6 = 6\times1 = 1\times2+3 = 2\times2+2 = 3\times2+0 = 1\times3+3 = 2\times3 =$

$= 1\times4+2 = 1\times5+1 = 1\times6$

$n_7 = 1+1+1+1+2+4+8+9+20 = 49$

для 8: $7 = 7\times1 = 1\times2+5 = 2\times2+3 = 3\times2+1 = 1\times3+4 = 2\times3+1 = 1\times4+3 = 1\times5+2 = 1\times6+1 = 1\times7$

$n_8 = 1+3+3\cdot2+2\cdot2+2\cdot4+2\cdot9+20+49 =$

$= 109$

Черновик лист 6

№1.

$x = 20t + a = 21k + a + 1 = 22f + 2$

$20t = 21k + 1$

$t = \frac{21k+1}{20}$ $(21k+1) \vdots 20$

$(20k + k + 1) \vdots 20 \Rightarrow$ min $k = 19$

$t = 20$

$400 + a = 22f + 2$ $a < 20 \Rightarrow$

$f = \frac{398+a}{22} = 10 + \frac{178+a}{22} = 18 + \frac{2+a}{22}$

a не сущ. $\Rightarrow$

$k = 39$

$\cancel{x =}$ $t = 41$

$\underset{22 \cdot 30}{660} + \underset{22 \cdot 7}{154} = 814$

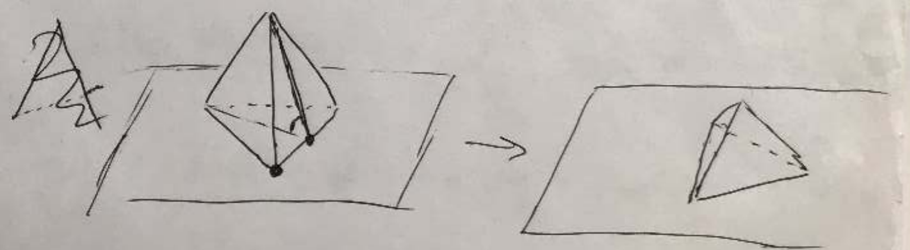
$x = 820 + a = 22f + 2$

$f = \frac{818+a}{22} = 37 + \frac{a+4}{22}$

$a = 18$

$x = 820 + 18 = 838$

№2.



Черновик лист 7

№3.

$$10^{2022}-9^{2022}=(10^{1011}+9^{1011})(10^{1011}-9^{1011})$$

$$10^{2022}-(10-1)^{2022}=10^{2022}-10$$

$$9^3=9\cdot 81=729$$

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b+\dots$$

$$(10-1)^3=10^3-C_3^1$$

$$(10-1)^{2022}=10^{2022}-C_{2022}^1\cdot 10^{2021}+C_{2022}^2\cdot 10^{2020}-\dots$$

$$-C_{2022}^3\cdot 10^3+C_{2022}^2\cdot 10^2-C_{2022}^1\cdot 10^1+1=$$

1000

$$=k\cdot 10^3+\frac{2022!}{2020!\cdot 2!}\cdot 100-\frac{2022!}{2021!}\cdot 10+1=$$

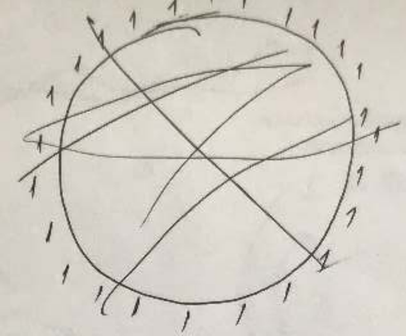
$$k\cdot 10^3+1011\cdot 2021\cdot 100-2021\cdot 10+1=$$

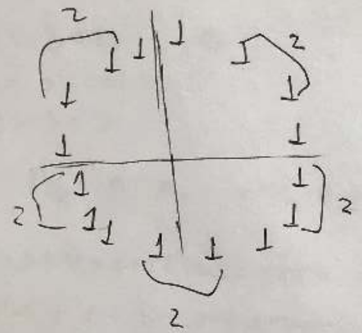
$$=\left(k+\frac{1011\cdot 2021-1}{10}\right)\cdot 10^3\underbrace{+100}-2000\cdot 10\underbrace{-210+1}=$$

$$=t\cdot 10^3+1000-109=t\cdot 10^3+\underline{891}$$

Черновик

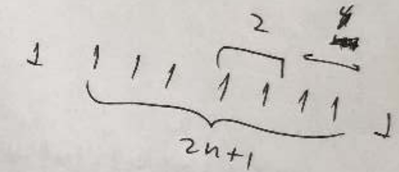
№4. лист 8



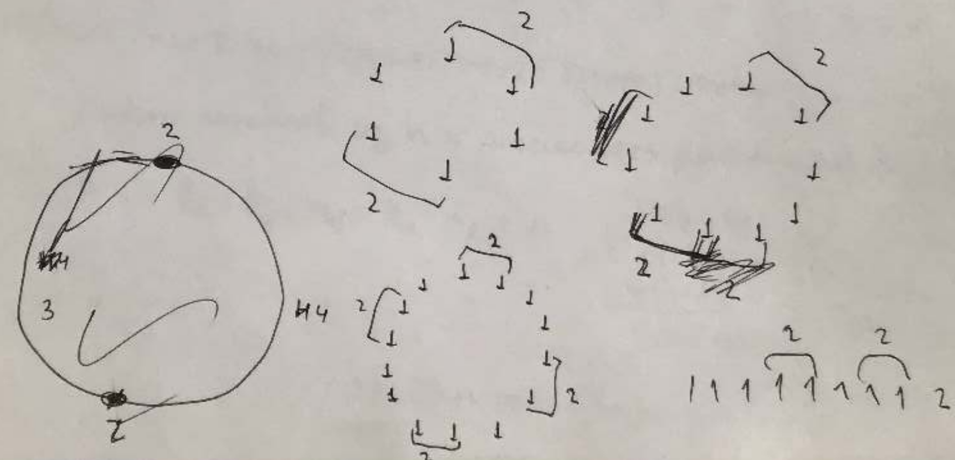


4 ← 3+1

4 ← 2+2



$2022 = 2 + 2020 = 2 + 4 \cdot n$



Черновик.

лист 9

число пакетов

число вариантов:

$n_1 = 1$ | число всех расст.

$n_2 = 1$ $k_1 = 1$

$n_3 = 2$ $k_2 = 2$

$n_4 = 4$ $k_3 = 4$

$n_5 = 9$ $k_4 = 9$

$n_6 = 18$ $k_5 = 18$

1

2

3

4

3

(() (( )))

$4-1 = 3 = 2+1$

$4-1 = 3 = 1+1+1$

$4-1 = 3 = 3$

$$n_4 = n_2 \cdot n_1 + n_1 \cdot n_1 \cdot n_1 + n_3 = 4$$

~~$5-1 = 4 = 1+1+1+1 = 2+2 = 2$~~

$5-1 = 4 =$ ~~$4 \cdot 1 = 2 + 2 = 2 \cdot 2 = 1 \times 4 = 1 \times 2 + 2 = 2 \times 2 = 3 \times 1 + 1$~~

$$\underbrace{4 \cdot 1}_{1} = \underbrace{2 \cdot 1 + 2}_{+1} = \underbrace{2 \cdot 2}_{+1} = \underbrace{3 \cdot 1 + 1}_{+2} = \underbrace{1 \cdot 4}_{+4} = 9$$

~~$6-1 = 5 = 5 \times 1 = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 2 \times 1 + 3 \times 1 = 1 \times 1 + 4 \times 1 = 1 \times 5$~~

$1 + 1 + 1 + 2 + 4 + 9 = 18$

~~$7-1 = 6 = 6 \times 1 = 4 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \times 1 + 2 \times 2 = 3 \times 2 = 3 \times 1 + 1 \times 3 = 2 \times 3$~~

пакет пакетов из n = число всех расстановок из $n-1$

$n_7 =$ ~~$k_6 = k_5 + n_6$~~ $= n_3 \cdot n_6 + n$

$()\ (\quad)$ — 1, 6

$()\ (\quad)$ — 2, 5

$$\begin{array}{l|l} t^3+4t^2+4t+a & t^2-2tb+b^2 \\ t^3 - 2t^2b + b^2t & t + 4b \\ (4+2b)t^2 + (4-b^2)t + a & \end{array}$$

$3b^2+8b+4=0$ $b^2 = 4b^2$ $-4+b^2 = (4+2b) \cdot 2b$

D 8

№6. Черновик лист 10

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ \cancel{y+}\, x = 4y^2 - 2 \end{cases}$$

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + b^3 + 3c^2b + c^3$

$y = 2x^2 - 1$

$x = 4(4x^4 - 4x^2 + 1) - 2 = 16x^4 - 16x^2 + 2$

$t^3 + 4t^2 + 4t + a \vdots (t-b)^2 = t^2 - 2tb + b^2$

$t(t^2 - 2tb + b^2) = t^3 - 2t^2b + tb^2$

$16x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0$

$t^2(t+4) + 4t + 16 = 0$

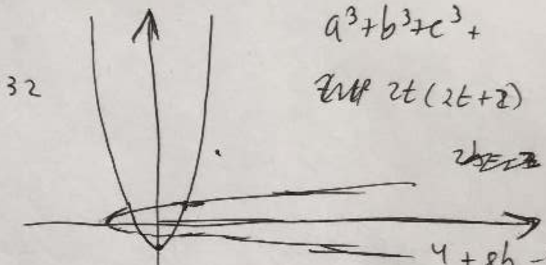
$t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$

$t^2(4+2b) + t(4-b^2) + a = 2t^2 - 2tb + b^2$

$a^3 + b^3 + c^3 +$

$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32$

$2t(2t+2)$



$x^3 + 4x^2 + 4x + a = 0$

$4 + 8b - b^2$

$-4x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4x - 4y - 4z + 32 - a = A$

$(t+2)(t^2 + 2t + 2) + 4t^2 + 4t - 8$

$y^3 + 4y^2 + 4y + a = 0$

$x^3 + y^3 + z^3 + 32 + 2a = A$

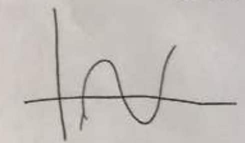
$t^3 + 4t(t+1) - 1 = (t+1)(t^2 + 3t - 1)$

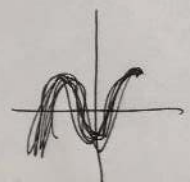
$(t-x)(t-y)(t-z) = 0$

$xy + yz + xz = 4$

$xyz = -a$

$x + y + z = -4$





$(x+y+z)^2 =$

$A = 32 - 16 - a = 16 - a$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 16$

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$

$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$

$(x+y+z)^3 = x(x^2+y^2+z^2) + y(x^2+y^2+z^2) + z(x^2+y^2+z^2) + 6xyz$

$(-4)^3 = (-4)\cdot 8 + 6xyz$