МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Смирнов Марк Евгеньевич**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	15	15	15	20	5

Задача 1. Чистовик Лист 1 из 9

Пусть штангист А поднял a кг, штангист Б – b кг; штангист В – c кг. Тогда можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=220 & (1) \\ a+c=240 & (2) \\ b+c=250 & (3) \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения первое:

$b+c-b-a=30 \Rightarrow c-a=30.$

Тогда $c-a+a+c=240+30=270$

$2c=270 \Rightarrow c=135$ кг.

Тогда (3) $b=250-c=250-135=115$ кг.

Тогда (1) $a=220-b=220-115=105$ кг.

Видно, что $a<b<c$ $\Rightarrow$ победитель соревнований

$105<115<135$

поднял 135 кг (c).

Ответ: 135 кг.

② $\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$ Лист 2 из 9

Чистовик

$\frac{1}{2022}=\frac{x+y}{xy}$

$xy=2022x+2022y$

$xy-2022x-2022y=0 \quad \Big| +2022^2$

$xy-2022x-2022y+2022^2=2022^2$

~~$x-2022$~~

Нетрудно заметить, что $xy-2022x-2022y+2022^2=\cancel{2022^2}$

$=(x-2022)(y-2022)$

Получаем:

$(x-2022)(y-2022)=2022^2=\underbrace{2^2\cdot3^2\cdot337^2}_{\text{разложение на простые}}$

Вместо $x-2022$ можно выбрать любой делитель числа 2022^2.
$(x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-2022\in\mathbb{Z}; y-2022\in\mathbb{Z}; (x-2022)(y-2022)=2022^2\Rightarrow$
$\Rightarrow x-2022$ и $y-2022$ - делители числа 2022^2). У $2022^2=2^2\cdot3^2\cdot337^2$
$3^3=27$ делителей. (Есть 3 способа выбрать степень двойки: 0, 1, 2; тройки: 0, 1, 2; 337: 0, 1, 2 $\Rightarrow 3\cdot3\cdot3=27$ способов составить делитель). После того как мы подберём значение x, значение y подберётся автоматически. Но мы так же можем делать $x-2022$ отрицательным (тогда просто $y-2022$ станет отрицательным). То есть, любое поло-

жительное значение $x-2022$ можно заменить противоположным.

А значит, исходное уравнение имеет 54 решения.

Но $x \neq 0$, $y \neq 0$ (иначе дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ не будут иметь смысла). Если $x=0$, то:

$$(0-2022)(y-2022)=2022^2$$

$$y-2022=-2022$$

$$y=0$$

$(x=0, y=0)$ - отдельное одно решение уравнения $(x-2022)(y-2022)=2022^2$, но оно не подходит для уравнения $\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Значит, у исходного уравнения $54-1=53$ решения.

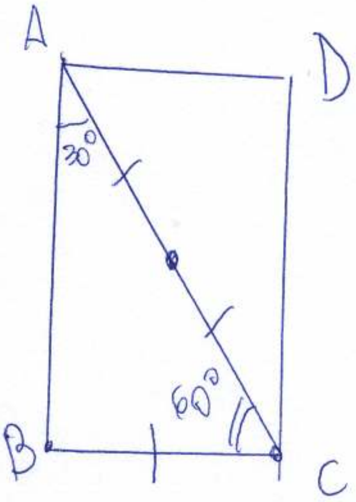
Ответ: 53.

Лист 3 из 9

Чистовик

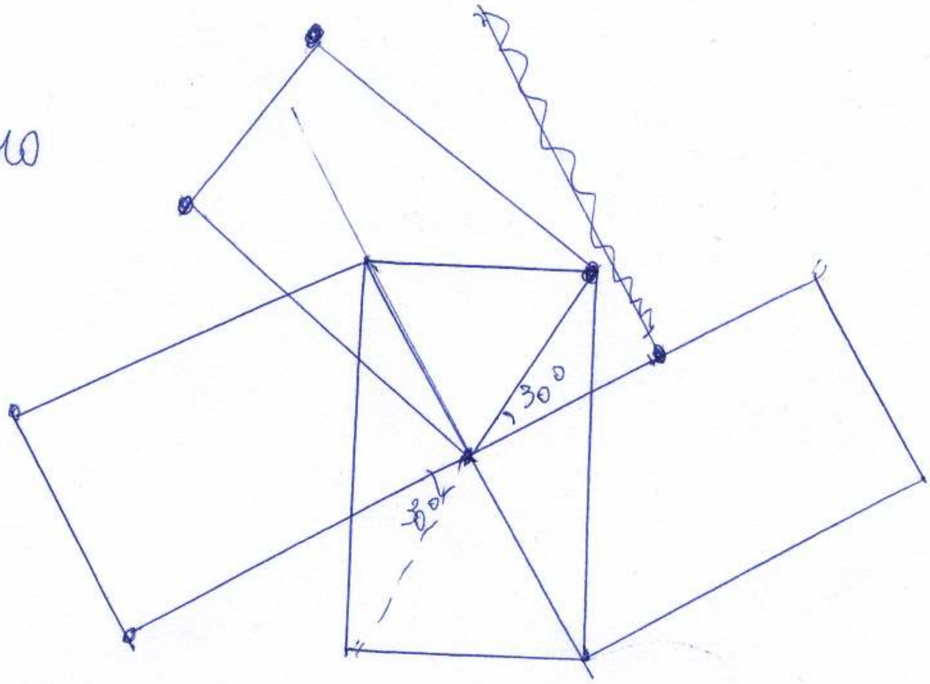
Задача 3. Лист 4 из 9

Да, можно. Возьмём прямоугольник, где диагональ в 2 раза больше меньшего катета:



$AB > BC$
(лежит против большего угла)

А теперь наложим 4 таких прямоугольника следующим образом:



Нетрудно проверить, что все условия выполняются.

Чистовик

Задача 4. Чистовик Лист ~~4~~5 из 9

Продолжим последовательность, пока она не зациклится:

$1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, | 1, 1, -1, \dots$

$x_4 = 1 \cdot (-1) = -1$
$x_5 = -1 \cdot 1 = -1$
$x_6 = -1 \cdot (-1) = 1$
$x_7 = -1 \cdot 1 = -1$
$x_8 = -1 \cdot (-1) = 1$
$x_9 = 1 \cdot 1 = 1$
$x_{10} = -1 \cdot 1 = -1$
x_{11}

Как видим, последовательность имеет наименьший цикл 7 (начиная с 8-ого члена последовательности она повторяет первые 3 числа предыдущего цикла, а ~~на~~ с 4-ого члена зависит только от предыдущих трёх ($x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$) => снова повторяется

Таким образом, последовательность зацикливается с циклом 7. $2022 \equiv 6 \pmod 7$ – т.к. $2022 - 6 = 2016 \vdots 7$
$2016 = 288 \cdot 7$

Значит, с 2017-ого члена последовательности начинается новый цикл:

$x_{2017}, x_{2018}, x_{2019}, x_{2020}, x_{2021}, x_{2022}$
$1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1$

$\Rightarrow x_{2022} = 1$.

Ответ: 1.

Задача 5. Чистовик Лист 5 из 9

$\overline{abcde}$:

$$(\overline{ab}+\overline{bc})(\overline{bc}+\overline{cd})(\overline{cd}+\overline{de})=157605$$

$157605=3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79$

1) Ни один из множителей не может быть больше 200 ($99\cdot2=198$ - максимальное значение суммы двух двузначных чисел). Следствием из этого является то, что одна из скобок равна 79 ($79\cdot3>200$). Если какая-то из скобок равна 79, то: $\overline{xy}+\overline{yz}=79$ (x,y,z - это какие-то из чисел a,b,c,d,e). Тогда $y+z=9$, $x+y=7$:

$y+z\equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow y+z=9$ или $y+z\geq19$, но $y+z\leq 9+9=18\Rightarrow$

$\Rightarrow y+z=9 \Rightarrow 10x+10y=70\Rightarrow x+y=7$.

Пусть $b+c=9$, $a+b=7$. Тогда $\overline{bc}+\overline{cd}=95$ или $\overline{bc}+\overline{cd}=105$ (единственные делители 157605 с такими первыми цифрами).

В первом случае $c+d=5\Rightarrow \overline{cd}+\overline{de}=57$

(единственный делитель 157605 с цифрой 5 или 6 вначале) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d+e=7$.

Тогда $57\cdot95\cdot79=3\cdot19^2\cdot5\cdot79\neq3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79$ по ОТА.

Если $b+c=9$ и $c+d=15$, то $\overline{cd}+\overline{de}\geq150$. Но $79\cdot150\cdot105>$

>157605 - этот вариант не подходит.

2) $\overline{bc}+\overline{cd}=79$

$c+d=9,\ b+c=7$

$\Rightarrow \overline{cd}+\overline{de}$ либо 95, либо 105. Рассуждения повторяются — этот вариант тоже не подходит.

3) $\overline{cd}+\overline{de}=79$

$$\begin{cases} d+e=9 \\ c+d=7 \end{cases}$$

$\overline{bc}+\overline{cd}=$ либо 7, либо 57 (делители 157605 с 7 на конце)

Если $\overline{bc}+\overline{cd}=7$, то $b+c=0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow \overline{ab}+\overline{bc}=$
$=10a$ — невозможно, $10a \vdots 2$

(каждая скобка нечётна — т.к. произведение нечётно).

Значит, $\overline{bc}+\overline{cd}=57 \Rightarrow b+c=5 \Rightarrow a+b=3$ (остался множитель 35):

~~ab+bc~~ $\begin{cases} a+b=3 \\ b+c=5 \\ c+d=7 \\ d+e=9 \end{cases}$ $a\in\{1;2;3\}$. Если $a=1$:

$b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5$

$\overline{abcde}=12345$

Если $a=2$: $b=1,\ c=4,\ d=3,\ e=6$.

$\overline{abcde}=21436$

вариант не подходит (есть 0).

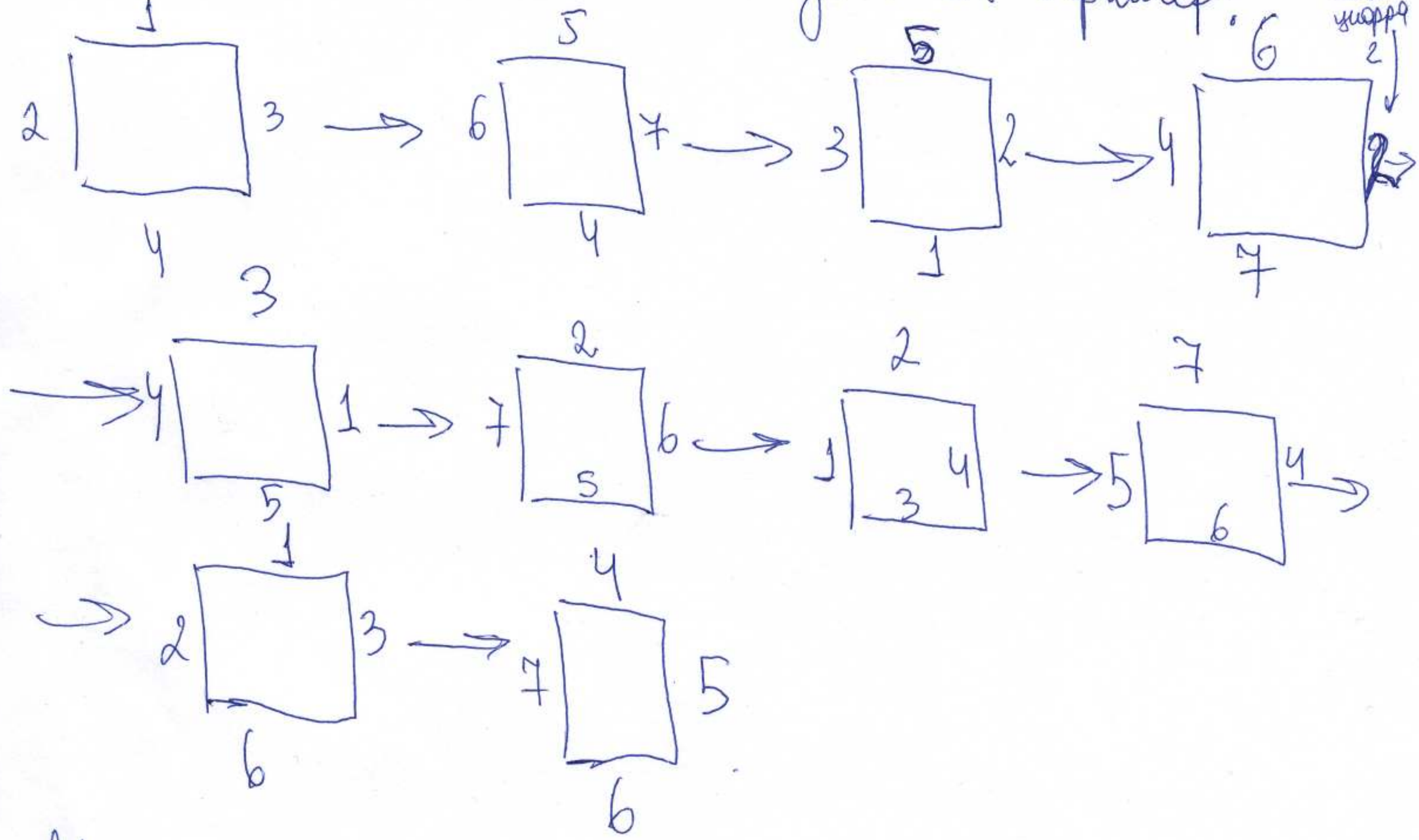
В последнем случае $a=3$: $b=0,\ c=5,\ d=2,\ e=7$.

$\overline{abcde}=30527$

Листовик

Задача 6.

Минимальное количество ходов: 9. Пример:



Меньше 8 точно нельзя. Нам надо каждому ~~цвет~~ лампочке дать ещё 6 цветов => всем четырём - $6 \cdot 4 = 24$. За ход мы даём не более одного цвета (нового) трём лампочкам => всего мы должны сделать $\geqslant \frac{24}{3} = 8$ ходов. Предположим, мы смогли сделать 8 ходов. Тогда каждый цвет фигурировал ровно 4 раза. Заметим, что после момента, когда цвет не горит, в следующий раз он горит. Рассмотрим цвет, который мы не трогали ~~один~~ первый раза. Всего у нас 9

конфигураций. Получим:

~~цвет цвет~~

$\cancel{+}$ + − + − + − + − − он присутствует

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ≥ 5 раз

(+ − он есть; − его нет).

В любом другом случае + и − меняются местами, кол-во + не уменьшается. => за 8 ходов это сделать нельзя.

Ответ: 9.

Итог 9 из 9

Чистовик

57 35

$(\overline{ab}+\overline{bc})(\overline{bc}+\overline{cd})(\overline{cd}+\overline{de})$

$\cancel{10a+b}$ $21b + 10a + 21b + 22c + 12d + e$

$3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79$

$(\underbrace{11b+10a+c}_{79})(\underbrace{11c+10b+d}_{105})(\underbrace{11d+10c+e}_{19}) = 157605$

$157605 : 5 = 31521$

$31521 : 3 = 10507$

$10507 : 7 = 1501$

$5\cdot3\cdot7\cdot19\cdot79$

$1501 : 17$

$1501 : 19 = 79$

$3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79 = \cancel{175}$

$1501 \cdot 105 = 7505 + 1501 = 157605$

$19 \cdot 79 = 171 + 133 = 1501$

$3045 \cdot 79 = 27405 + 28315$

$105 \cdot 29 = 945 + 210 = 3045$

$79 \cdot 31055$

$79 \cdot 57 \cdot 35$

Черновик (1)

Черновик ②

$d+e=9$

$c+d=7$

$b+c=0$

$c=0;\ b=0$

7

$a+b=7$

$b+c=9$

$b+c=9$

$c+d=15$

$c+d=1$

$\begin{cases} b+c=9 \\ a+b=7 \end{cases}$

$c+d=9$

$b+c=7$

$\cancel{c+e}$

$d+e=9$

$c+d=7$

$b+c=5$

79 79,7

95

21

$$\begin{array}{r} 19 \\ +\ 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$a+b=5$

57

79

$\begin{cases} a+b=3 \\ b+c=5 \\ c+d=7 \\ d+e=9 \end{cases}$

1 2 3 4 5

35 57 79

2, 1, 4, 3, 6

3 0 5 2 7

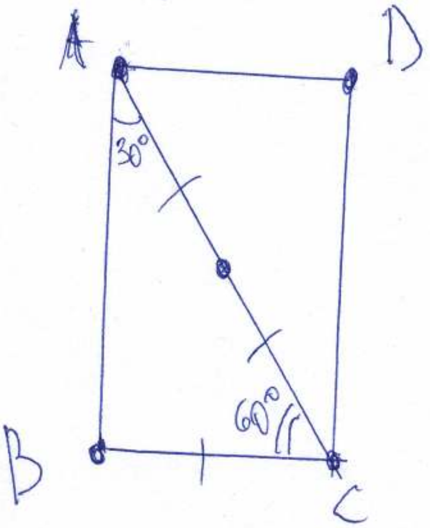
35

5·7 3·19 79

Задача 3.

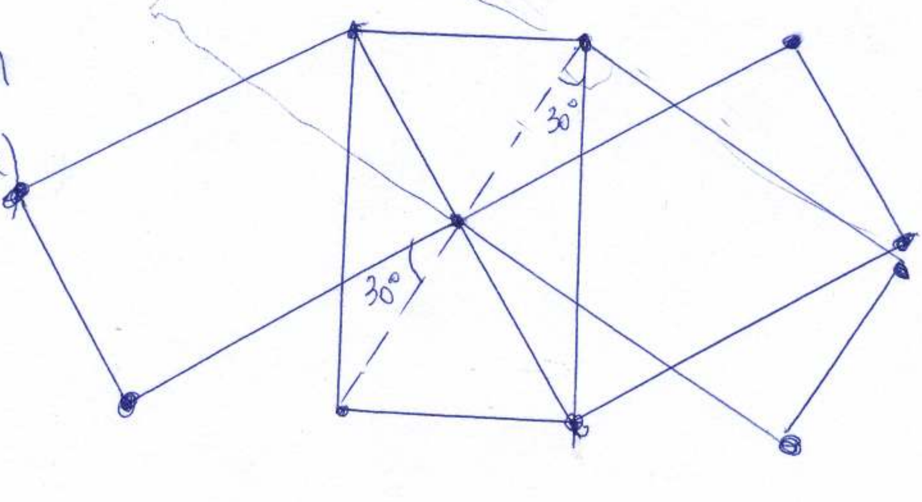
Черновик (3)

Да, можно. Возьмём прямоугольник, где диагональ в два раза больше меньшего катета:



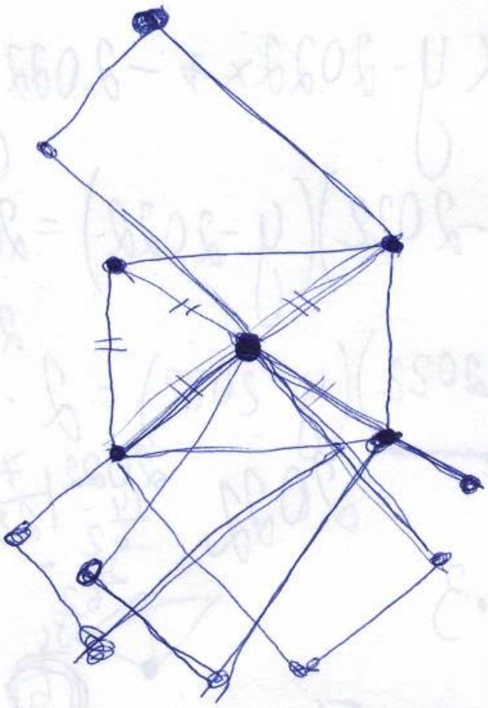
$AB > BC$ (лежит против большего угла)

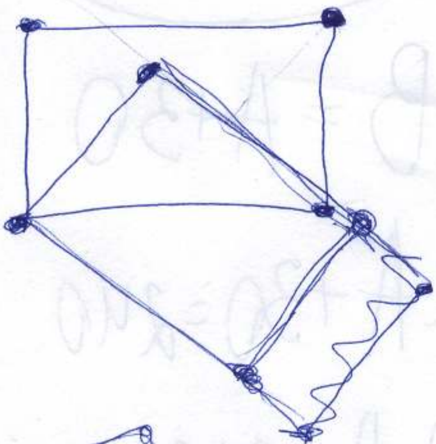
А теперь наложим 4 таких прямоугольника следующим образом:

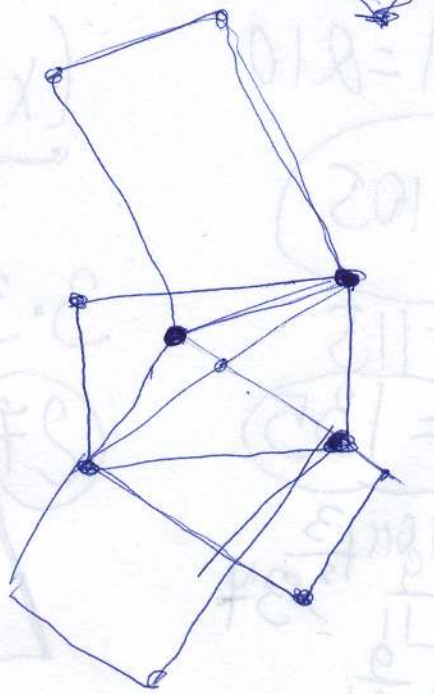


4

Черновик



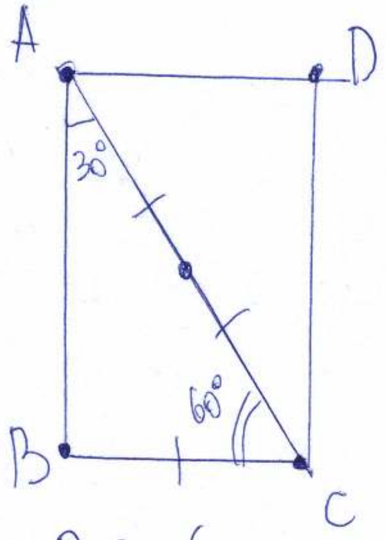




Задача 3.

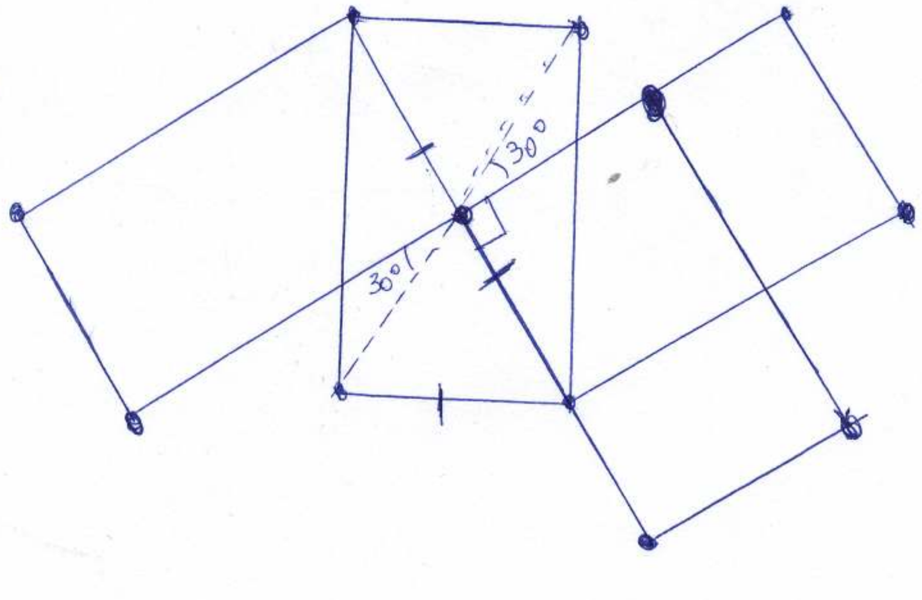
Черновик 5

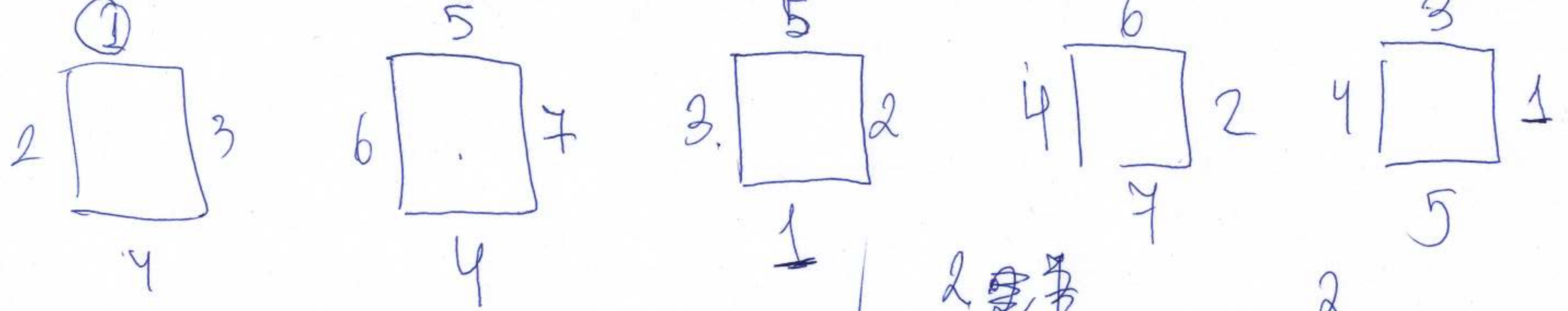
Да, можно. Возьмём прямоугольник, где диагональ в два раза больше меньшего катета:



А теперь наложим 4 таких прямоугольника следующим образом:

AB > BC (лежит против большего угла)

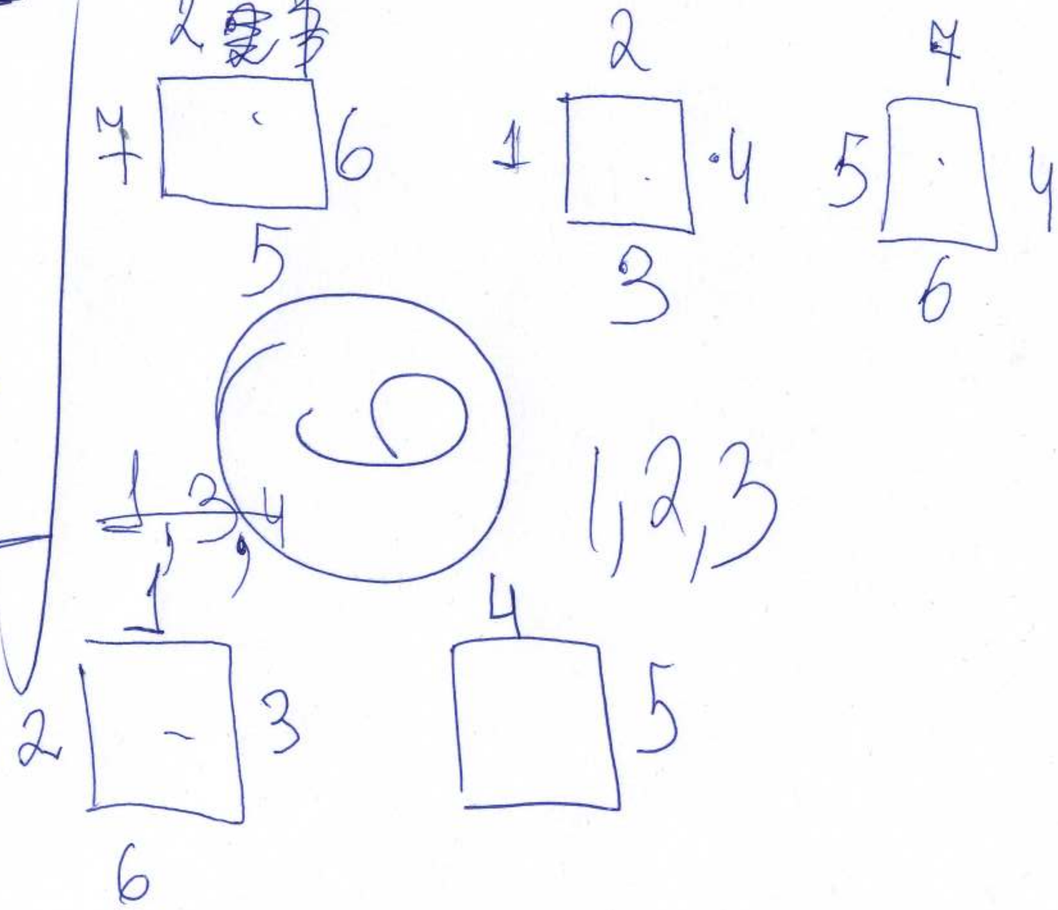




I: 1, 5, 6, 3, 2, 7, 4
II: 2, 6, 3, 4, 7, 1, 5
III: 3, 7, 2, 1, 6, 4, 5
IV: 4, 1, 7, 5, 3, 6, 2

8 ≥5

Черновик



1, 3, 5, 7, –

X, X, – X, –, ~~X~~ – X –
1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Черновик 7

$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$

$a+b=7$
$b+c=9$
$c+d=5$
$d+e=7$

61

$c+d=7$
$d+e=9$

$\overline{ab}+\overline{bc}=79$ $11b+10a+c$

79

$\overline{bc}+\overline{cd} \geq 90$ 105

$\overline{cd}+\overline{de}=07+$ 95 105 19

$10c+10d$ 19

$61+18=79$

$19 + 7$

43+36

36+69

45 + 4

$b+c=9$
$c+d=9$
$d+e=9$

$a+b=7$
$b+c=7$
$c+d=7$

52+27

27+78=105

7+8

78+8

18+8

9

79, 19, 95

$c+d=7$

$10c+10d=70$

$d+e=9$

19

105

$b+c=9$
$c+d=9$
$d+e=9$

$\overline{cd}+\overline{de}=79$

25 54

2 25

25+54

34+45

Черновик

8