МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Солдатова София Александровна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	5

Чистовик Задача №1

Рассмотрим число B

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$B^6 = \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}{4}$$

$$B^6 = \frac{(4-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$B^6 = \frac{(16-12)}{4}$$

$B^6 = 1 \Rightarrow B = 1$ т.к под корнями нечетной степени стоят положит. числа.

Рассмотрим A:

$$A = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{89}{(44\cdot45)^2}$$

~~Заметим, что числа вида~~ $\cancel{\frac{2\cdot2+1}{2^2(2+1)^2}}$ ~~раскладываются как~~ $\cancel{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{(2+1)^2-2^2}{2^2(2+1)^2} = \frac{2\cdot(2+1)}{\ldots}}$ ~~=> имеем~~

$\cancel{A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 = B}$

~~Значит B > A~~

~~Ответ: B > A~~

Заметим, что все слагаемые числа A имеют вид $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, что можно представить как

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$$

Таким образом A имеет вид:

$$A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2} < B = 1$$

Ответ: B > A

Чистовик

№2

Рассмотрим все подходящие нам двузначные числа:

Кратные 19:	Кратные 23:	
19	23✓	и 00
38✓	46	
57	69	
76	92✓	
95		

Последняя цифра каждого двузначного числа будет являться началом следующего числа. Заметим, что ни одно двузначное число, подходящее нам не начинается с 8. Значит, нам не подойдут и те числа, которые оканчиваются на 8, иначе мы не сможем поставить следующую цифру ~~[illegible]~~ (только если 8 не является последней цифрой числа.

Тк первая цифра 1, то следующей может быть только 9. Из написанного выше, мы не можем поставить ~~пост такие~~ цифры так, чтобы получилось 38, 23, 92. Значит, после 9 может быть только 5, после 5 7, после 7 6, после 6 9 — получаем цикл, состоящий из 4х цифр: $\underbrace{9576}$ 9576 и тд. Тк единица уже поставлена, то рассмотрим сколько раз поместится наш цикл

$2021 - 1 \underset{4}{\equiv} 0$ => наше число окончится на 6.

Но рассмотрим, может ли наше число оканчиваться на 8. Если оно оканчивается на 8, то перед 8 была 3, перед 3 — 2, перед 2 — 9. То есть ~~т~~ .....9238, при этом предыдущие циклы оканчивались на 6 => вместо последнего ~~[illegible]~~ цикла 9576 мы можем поставить 9238 и число закончится на ...95769238 => на 8, тк 9238 имеет длину 4.

Мы можем говорить о циклах, тк задается взаимнооднозн. отображение: $1 \to 9 \to 5 \to 7 \to 6$ (если мы не говорим о последнем цикле.

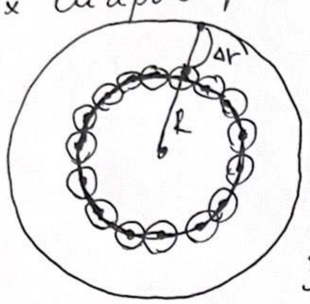
Тк имеется только 1 число с 1 (19), с 9 (92), с 5 и тд

Ответ: на 6 или 8

2

Чистовик №4

Т.к. все шары касаются и основания, и боковой поверхности, и двух шаров рядом, то центры всех шаров расположены на одной окружности.



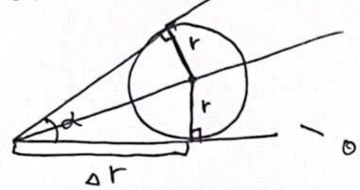
Соединив центры ~~окружности~~ шаров мы получим правильный многоугольник.
Тогда радиус описанной окружности $R = \frac{a}{2\sin(\frac{180}{13})}$, где

$a = 2r$, где r - радиус шара.

Заметим, что ~~центры шаров будут~~ шары будут лежать на Δr от края основания конуса, т.к. боковая сторона находится под наклоном.
То есть наш шар должен быть вписан в угол α = ~~~~ $60°$. Тогда $\Delta r = r\, ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Значит, искомый радиус

$$R_x = R + \Delta r = \frac{4}{2\sin(\frac{180}{13})} + 2\,ctg\,60°$$



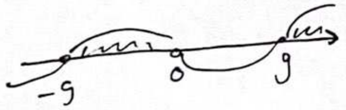
– осевое сечение, проходящее через центр одного из шаров

Ответ: $\frac{2}{\sin(\frac{180}{13})} + 2\,ctg\,60° = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

№5

$a > 0$, когда

$t(t-9)(t+9) > 0$



$a > 0$ при $t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$

$b > 0$, когда

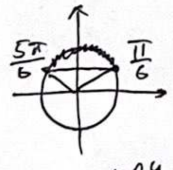
$11^t - 121 > 0$

$t - 2 > 0$

$b > 0$ при $t \in (2;+\infty)$

$c > 0$ когда

$\sin t - \frac{1}{2} > 0$



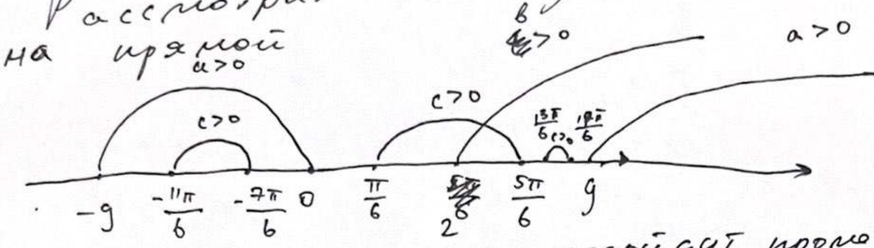
$c > 0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$

$k \in \mathbb{Z}$

Чистовик

№5 (продолжение)

Рассмотрим все полученные интервалы на прямой



Заметим, что нам подойдут промежутки, где a, b, c > 0, либо где хотя бы 2 числа > 0

Тогда нам подойдут:

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$ — a>0 и c>0

$t \in \left[2; \frac{5\pi}{6}\right)$ — c>0, b>0

$t \in \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$ — c>0, b>0

$t \in (9; +\infty)$ — тк либо a, b, c > 0, либо a>0, b>0, c≤0

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left[2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

№3

1 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

2 $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}}$

3 $f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7-x^7+1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = x$

4 $f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ => получили цикл длины ~~4~~ 3

$1304 \equiv_3 \cancel{4}2 \Rightarrow f(f(\ldots f(\cancel{2022}\,x))) = \frac{1}{x\sqrt[7]{\frac{1}{x^7-1}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f(f(f\ldots f(2022)))}_{1304} = \frac{1}{2022\sqrt[7]{\frac{1}{2022^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022} =$

Ответ: $\sqrt[7]{2022^6 - \frac{1}{2022}}$

4

Чистовик

№6

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tgx + 2a = 0$

$(tgx-1)(a\,tg^2x + tgx - 2a^2 tgx - 2a) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \frac{\pi}{4}$

$a = 0 \Rightarrow tgx = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow tgx_3\, tgx_2 = -2$

$tgx_2 + tgx_3 = 2a - \frac{2}{a}$

$f(a) = 2a - \frac{2}{a}$

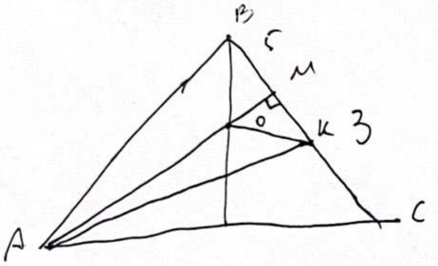
$E\,f(a) \in (-\infty; +\infty)$ $\Rightarrow$ tgx_2 или tgx_3 отриц $\Rightarrow$

т.к. $tgx_3\, tgx_2 < 0$ больше, чем $\frac{\pi}{4}$

мах расстояние $x = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $a = 0$

№7



$\frac{\sin\angle AKO}{AO} = \frac{\sin\angle KAO}{OK} = \frac{MK}{AK\cdot OK}$ – max

$\frac{AK\cdot OK}{MK}$ – min

$\frac{AK\cdot OK}{MK} = \frac{\sqrt{MK^2 + [illegible]}}{MK} = \frac{\sqrt{MK^4 + MK^2MO^2 + MK^2AM^2 + AM^2\cdot MO^2}}{MK}$

$= \sqrt{MK^2 + MO^2 + AM^2 + \frac{AM^2\cdot MO^2}{MK^2}}$

~~МО и МК – константы~~

$MK^2 + \frac{AM^2\cdot MO^2}{MK^2} \geq 2\sqrt{AM^2\cdot MO^2} = 2AM\cdot MO = 30$

$AM\cdot MO = CM\cdot BM = 15$ из подобия

min достиг $\cancel{MK^2 = AM^2\,MO^2}$

5

Черновик $\frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}{4} =$ $= (4-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}+1)$

$(16-12)$

$\sum_{n=1}^{n=44} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$

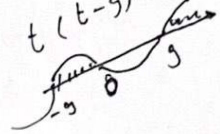
$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2}$ $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}$ $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}$

$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2}$

$t^3 - 81t > 0$

$t(t-9)(t+9)$



$\frac{3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 45^2 + 4^2 \cdot 5^3 \ldots 45^{-2} + 2^2}{(45!)^2}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{7}{144}$

19576 9

1 9576 9238

$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $0{,}75 +$ $\frac{108}{144}$

Вти угольник?

$t - 121 > 0$

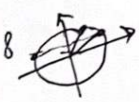
$t - 2 > 0$

$t > 2$

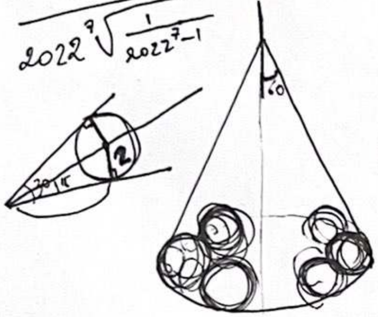
$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}$

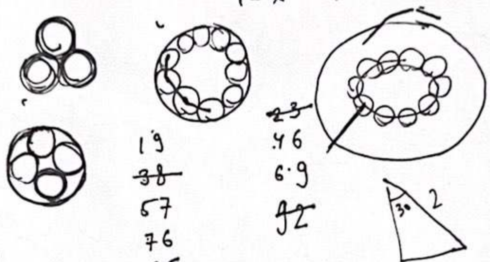
$\frac{1-x^7-1}{1-x^7} = \frac{x^7}{x^7-1}$

238



$\frac{1}{2022\sqrt[7]{\frac{1}{2022^7-1}}}$





19
~~38~~
57
76
95

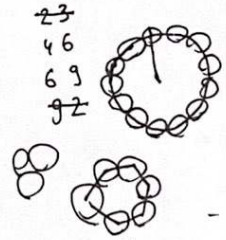
~~23~~
46
69
~~92~~

1 — 9
9 — 5
5 — 7
7 — 6
6 — 9

$\frac{\pi}{6} + 2\pi$

19
~~38~~
57
76
95

~~23~~
46
69
~~92~~



$\sin t - \frac{1}{2} \in -1{,}5;\ 1{,}5$

$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = n^2+2n+1-n^2$

$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $\sin t = \frac{1}{2} > 0$ 1984

$2\ \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}}$

$t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$

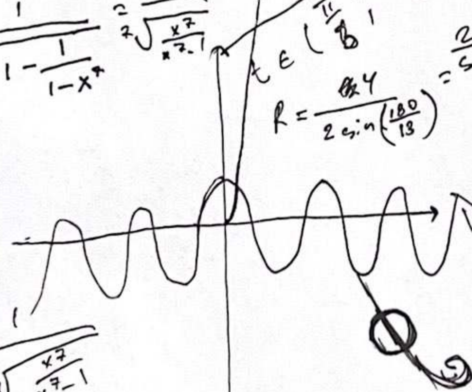
$R = \frac{4}{2\sin\left(\frac{180}{13}\right)} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

1 2 3 4 5 6 7 _ 9

$-2020 \,|\, \frac{4}{505}$

$\frac{20}{02}$

$t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$



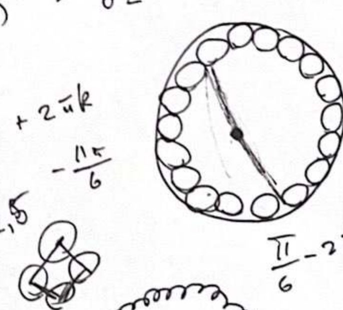
1) $t \in (2;+\infty)$

2) $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) + 2\pi k$

3) $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ $-\frac{11\pi}{6}$

55 55 2,5

$\frac{1}{2}$



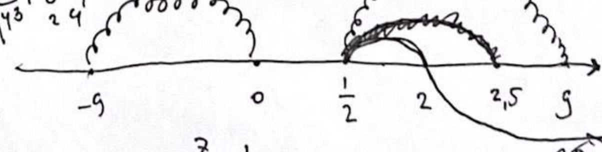
$\frac{13\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} - 2\pi$

$\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}}$

1304 | 4
32

$1304 \,|\, 3\ 7\ 2$
43 1 0
24



-9 0 $\frac{1}{2}$ 2 2,5 9

$\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}}}} = \frac{x^7}{x^7-1}$

$x^7 - 1 - x^7 \quad 1 - x^7 - 1$

$= \frac{1}{x^7-1}$

$t+9$

$\left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup$

$\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup$

$9 + \infty$

1

Черновик

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^7}{x^7-1}}} =$$

$\sin ARO_{max}$