МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Солоницкий Максим Алексеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	0

Черновик. №1

Задача №1. Мат. индукция.

1) $n=2.\quad \frac{3}{(1\cdot2)^2} = \frac{(2)^2-1}{2^2}$

2) $n=m\quad \frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\frac{7}{(3\cdot4)^2}+\frac{9}{(4\cdot5)^2}+\ldots\frac{2m-1}{((m-1)m)^2}=\frac{m^2-1}{m^2}$

3) $n=m+1\quad \frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{2m-1}{((m-1)(m))^2}+\frac{2m+1}{((m)(m+1))^2}=\frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2}$

$$\frac{m^2-1}{m^2}+\frac{2m+1}{(m)^2(m+1)^2}=\frac{(m^2-1)(m+1)^2+2m+1}{m^2(m+1)^2}$$

$$(m^2-1)(m+1)^2=(m^2-1)(m^2+2m+1)=$$

$$=\frac{m^4+2m^3+\cancel{m^2}-\cancel{m^2}\cancel{-2m}\cancel{-1}\cancel{+2m}\cancel{+1}}{m^2(m+1)^2}$$

$m^2\quad m^2(m+2)$

$\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2,5$

Черновик. №2

$4-2\sqrt{3} = 3-2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}-1)^2$

$$\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$8 \times 16 = 48$, 128

7

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} +$

$144 \div \frac{9}{16}$, 9, 54

$\frac{9}{400} + \frac{15}{16}$

27

$\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

$\frac{7}{144}$

$\frac{135}{144}$

$\cdot \frac{15}{16}$

при ③ . $n + n - 1$

Черновик № 3

черновик

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

$B=1$

$n=1$ $\frac{3}{4}$

$n=2$ $\frac{8}{9}$

$n=3$ $\frac{15}{16}$

По мат. индукции.

при $n=1$ $\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$ — ✓

при $n=m$ $\frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2}$

при $m+1$

$$\cancel{\frac{3}{((m+1)m)^2}}+\cancel{\frac{5}{((m+1)(m+2))^2}}+\frac{7}{((m+2)(m+3))^2}=$$

Черновик. Задача № 2. № 4

95776957695776 ...

95
23

9238 — противоречие

19
+
76

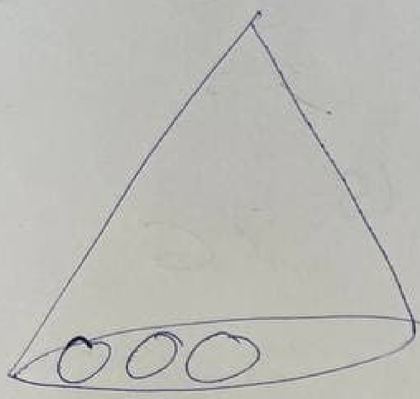
2022 | 4
20
20
20
0

2022 mod 4 = 2

2020 | 4
20 | 505

92 2018 | 92

Черновик №5



$$(m^2-1)(m+1)^2 =$$

$$= (m-1)(m+1)^3 =$$

$$= (m^4+2m^3+m^2-m^2-2m-1)$$

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

Чистовик. Лист №1.

Задача 1.

1) $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(3-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

(Мы преобразовали число B и получили, что оно равняется 1)

2) Преобразуем число A.

Докажем, по методу математической индукции, что $\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{7}{(3\cdot 4)^2} + \ldots + \frac{2n-1}{(n\cdot(n-1))^2} = \frac{n^2-1}{n^2}$ (Это наше число A)

а) $n=2$ ($n>1$, т.к иначе мы будем делить на 0)

$\frac{4-1}{(2\cdot 1)^2} = \frac{4-1}{2^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ — верно

б) $n=m$ (мы предполагаем, что есть m при котором выражение верно)

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{7}{(3\cdot 4)^2} + \frac{9}{(4\cdot 5)^2} + \ldots + \frac{2m-1}{(m\cdot(m-1))^2} = \frac{m^2-1}{m^2}$

в) $n=m+1$ (Докажем, что при $n=m+1$ выражение тоже верно)

$\underbrace{\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{7}{(3\cdot 4)^2} + \ldots + \frac{2m-1}{(m\cdot(m-1))^2}} + \frac{2m+1}{((m+1)m)^2} = \frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2}$

Это при $n=m$, значит:

$\frac{m^2-1}{m^2} + \frac{2m+1}{m^2(m+1)^2} = \frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2}$ (Докажем это)

$\frac{(m^2-1)(m+1)^2+2m+1}{m^2(m+1)^2} = \frac{m^4+2m^3+\cancel{m^2}-\cancel{m^2}-\cancel{2m}-\cancel{1}+\cancel{2m}+\cancel{1}}{m^2(m+1)^2} = \frac{\cancel{m^2}(m^2+2m)}{\cancel{m^2}(m+1)^2} =$

$= \frac{m^2+2m+1-1}{(m+1)^2} = \frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2}$ (следовательно, при $n=m+1$ выражение тоже верно, значит и все выражение верно)

Чистовик. Лист 2

Задача 1 (продолжение)

С помощью ранее доказанным, вычислим A.

$$A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\frac{7}{(3\cdot4)^2}+\frac{9}{(4\cdot5)^2}+\ldots+\frac{99}{(49\cdot50)^2}=\frac{50^2-1}{50^2}=\frac{2499}{2500}$$

Значит, число $B > A$ (т.к $1 > \frac{2499}{2500}$)

Ответ: число B больше.

Задача №2.

У нас есть 2022х-значное число $A=\overline{a_1a_2a_3a_4\ldots a_{2022}}$ у которого любые две соседние подряд цифры (стоящие в том же порядке) образуют двузначное число, которое либо делится нацело на 23, либо нацело на 19.

Выпишем все числа кратные (двузначные) кратные либо 19, либо 23.

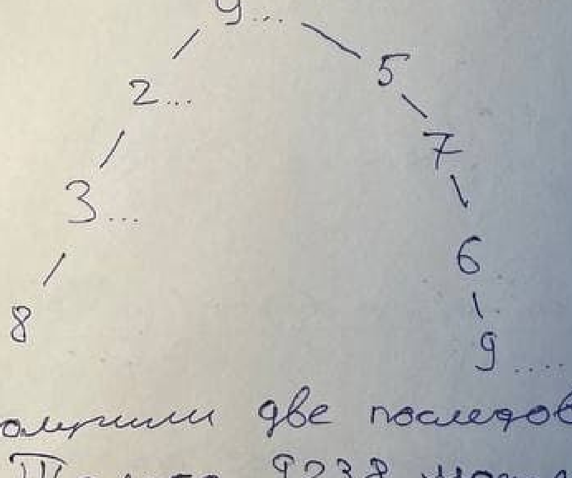
19: 19, 38, 57, 76, 95.

23: 23, 46, 69, 92.

Наше 2022х значное число начинается с 9.

Значит, следующими цифрами могут быть либо 2, либо 5 (т.к 92 делится на 23, а 95 на 19)

Построим дерево:



Мы получили две последовательности, 95769 и 9238. Только 9238 может стоять в самом конце, ведь нет двузначных чисел, которые начинаются с 8D и делятся либо на 19, либо 23.

Чистовик. Лист 3.

Задача 2 (продолжение)

Значит, у нас вышло, что 95769... будет повторяться. Значит 9576 будет встречаться минимум 505 раз (т.к $4 \cdot 505 = 2020$). Получаем, что последние ~~две~~ цифры числа будут либо 95, либо 92. Значит, последняя либо 5, либо 2.

Ответ: 5 или 2

Задача 3

1) $F(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$; 2) $F(F(x)) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1}{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1-x^9}{-x^9}}$

3) $F(F(F(x))) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-\frac{1-x^9}{-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1}{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1}{\frac{1-x^9+x^9}{x^9}}} = \sqrt[9]{x^9} = x$

Значит, $x = F(F(F(x)))$, то есть, каждый третий раз ~~такое~~ у нас выходит наше же число.

а 1305 делится нацело на 3, значит у нас будет ответ 2022

Ответ: 2022

Задача №6

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)tg^2x + (2a^2-2a-1)tg\,x + 2a = 0$

принадлежит интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ и принимает наименьшее значение? Найти наименьшее значение.

1) $a = 0$

$tg^2x - tg\,x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,x = 0 \\ tg\,x = 1 \end{array}\right. \overset{x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$ расстояние $\frac{\pi}{4}$

чистовик лист 4.

Задача №6 (продолжение)

2) $a \neq 0$

$2a^2+a-1=0$

$D=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9 \Rightarrow a=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$2a^2-2a-1=0$

$D=4+4\cdot 2\cdot 1=\cancel{2}\,12 \Rightarrow$

$tg^3x+\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)tg^2x+\frac{2a^2-2a-1}{a}tgx+2=0$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

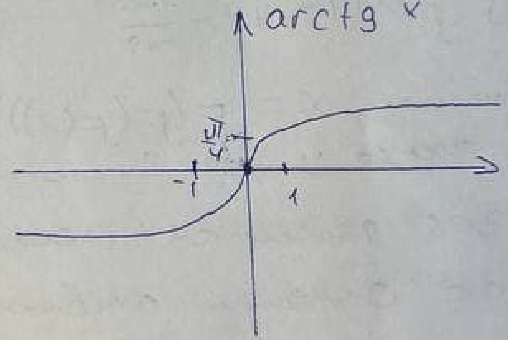
(теорема Виета для кубического уравнения)

$\begin{cases} tg\,x_1=-\frac{1}{a} \\ tg\,x_2=1 \\ tg\,x_3=2a \end{cases} \Rightarrow tg^3x-\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)tg^2x+\left(2a-2-\frac{1}{a}\right)+2=0$

Проверка

Наши корни:

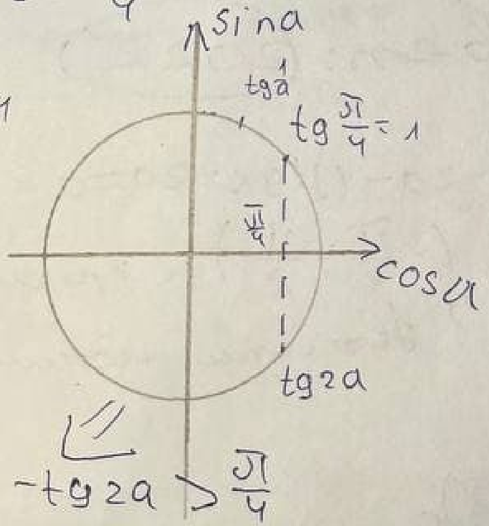
$x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\begin{cases} x_1=arctg\left(-\frac{1}{a}\right) \\ x_2=arctg(1)=\frac{\pi}{4} \\ x_3=arctg(2a) \end{cases}$



$a<-1:\ x_2-x_1>0$

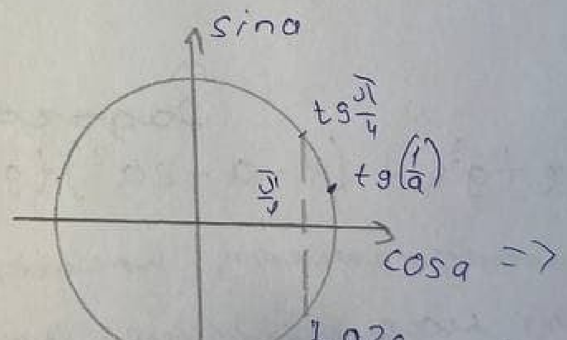
$x_1-x_3=\frac{\pi}{4}-arctg\,2a$

$a>-1$



$tg\frac{\pi}{4}-tg\,2a>\frac{\pi}{4}$

$a<0$



$\Rightarrow tg\frac{\pi}{4}-tg\,2a>\frac{\pi}{4}$

Чистовик. Лист 5.

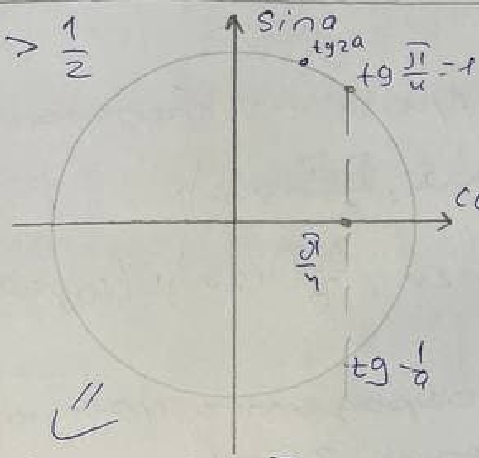
Задача 6 (продолжение)

$a > 0$:

$a > \frac{1}{2}$ $(x_3 - x_2) > 0$

$a < \frac{1}{2}$ $(x_2 - x_3) > 0$

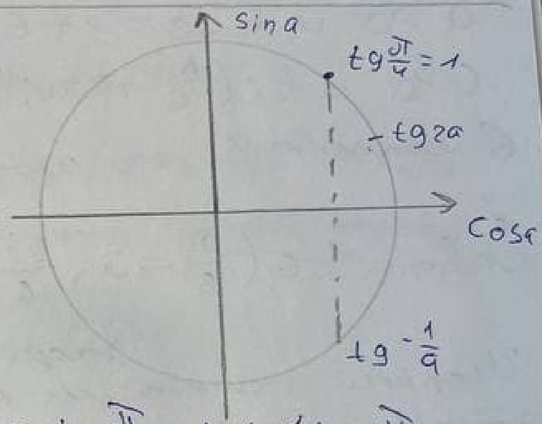
$a > \frac{1}{2}$



$\Downarrow$

$tg\frac{\pi}{4} - tg(-\frac{1}{a}) > \frac{\pi}{4}$

$a < \frac{1}{2}$



$\Rightarrow tg\frac{\pi}{4} - tg(-\frac{1}{a}) > \frac{\pi}{4}$

Делаем вывод, что минимум это максимум (при $a=0$), то есть, Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задача №5.

Найдем интервалы в которые эти функции принимают положительные значения.

$a = t^3 - 100t > 0 \quad t \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$

$b = 2^t - 16 > 0 \quad t \in (4;+\infty)$

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0 \quad t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k), k \in Z$

1) при $t > 10$ a и $b > 0 \Rightarrow$ хотя бы 2 числа >0 значит, среднее тоже больше 0.

2) При $t \leq 10$ и $t \geq 0$, $a < 0 \Rightarrow b$ и $c > 0$, а $b > 0$ при $t \in (4;10]$

$c > 0$ и $\subset (4;10]$ $\quad (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$ при $k = 1$ полностью входит в $(4;10]$

$\Rightarrow$ интервал $(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi)$

При $k=0$: $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ Чистовик. Лист – 6.

$\frac{\pi}{6}<4$

$\frac{5\pi}{6}<4$ $\Rightarrow$ не удовлетворяет интервалу

3) При $t<0$, $b<0 \Rightarrow a$ и $c>0$

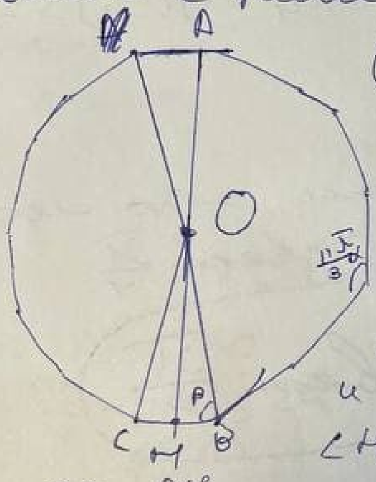
$a>0$ и $t<0 \Rightarrow t\in(-10;0)$

$c>0$ и $t\in(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k)$ = при $k=-1$ входит в интервал $\Rightarrow$ интервал $(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi)$

Ответ: $t\in(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi)\cup(\frac{\pi}{6}+2\pi; \frac{5\pi}{6}+2\pi)\cup(10; +\infty)$

Задача №4

Шарики точками касания образуют правильный 13-угольник с углом $\frac{11\pi}{13}$ и рёбрами $2r=4$



Обозначим его центр как O, H — высоту, CB — грань

$AH=AO+OH=OB+OH$ ($AO=OB=OC$, т.к. т. O – это центр.

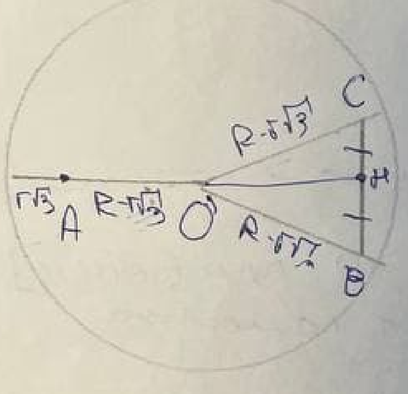
$\triangle OCB$ – равноб., значит OH не только высота, но и медиана и биссектриса, значит $CH=BH=2$

$\angle HBO=\frac{\angle}{2}=\frac{11\pi}{26}$ (обозначим как β)

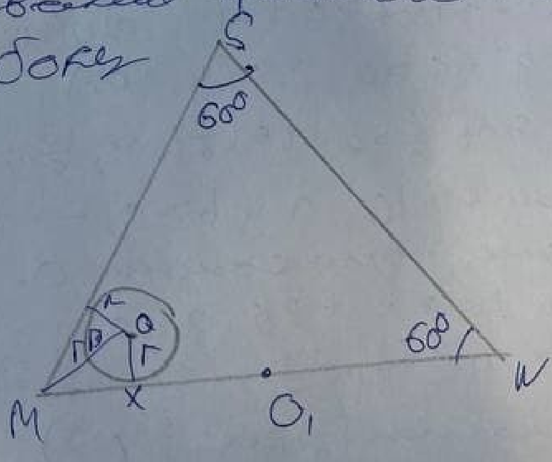
Тогда $OB=\frac{BH}{\cos\beta}$ и $OH=HB\cdot tg\beta$

Теперь осмотрим основание данного конуса.

Сверху



Сбоку



Чистовик. Лист №7

Задача 4 (продолжение).

(O' – центр основания, ч.он совпал с Q) т.к. расстояние до всех нижних вершин одинаково. Тогда $O'H = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{(R + r\sqrt{3})^2 - r^2}$

$AO' = R - r\sqrt{3}$

Угол при вершине $= 60^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle$ равносторонний. $\Rightarrow \angle CM = 60^\circ \Rightarrow \angle QMX = 30^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow XM = r\sqrt{3} \Rightarrow$ расстояние от точки касания шаров с поверх. призмы равно $r\sqrt{3}$

Тогда $O'\theta = R - r\sqrt{3} = O\theta = \frac{H\theta}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\left(\frac{11\pi}{26}\right)}$ $\beta = \frac{11\pi}{26}$

$R = r\sqrt{3} + \frac{r}{\cos\frac{11\pi}{26}} \Rightarrow R = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}}$

Ответ: $2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}}$