



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сомова Анастасия Дмитриевна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

ЧИСТОВИК

№1

$16 = 2^4$. Одна грань невидима. Всего 6 граней. Значит, вариантов наборов пяти чисел всего 6.

Если всех чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 два, входит ровно 4 раза 1, 2, 2, 2, 3 и $16 = 2^4 \Rightarrow$ если четные числа не будут видны, то только произведение уже не будет: 16, если же все четные числа будут видны, то произведение: $2^4 \Rightarrow 16 \Rightarrow$ будет кратно 16 тогда и только тогда, когда внизу четное число. Всего чисел 6, случаев 6, нечетных 3. Вероятность = $\frac{\text{число благоприятных}}{\text{все}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

Ответ: 0,5

№2

$n \in \mathbb{N}$

$1 \leq n \leq 2022$

Входит в арифметическую прогрессию 1, 3, 5, ... \Rightarrow все нечетные числа от 1 до 2022 и в сумме $2022:2 = 1011$

В арифметическую прогрессию 1, 4, 7, ... входят все числа с остатком 1 при делении на 3. 2022 делится на 3. Всего в 2022 входит 674 тройки. В каждой из которых ровно одно число, которое дает остаток 1 при делении на 3 \Rightarrow таких чисел 674, но так как шаг прогрессии 3, то каждый раз меняется четность, следовательно число нечетно \Rightarrow уже была посчитана. $674:2 = 337$
Значит, всего $1011 + 337 = 1348$ чисел входит в эти прогрессии до 2022 \Rightarrow чисел, удовлетворяющих условию $2022 - 1348 = 674$

Ответ: 674 числа

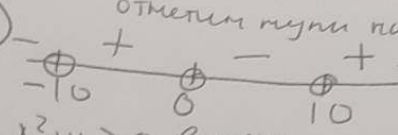
Чистовик

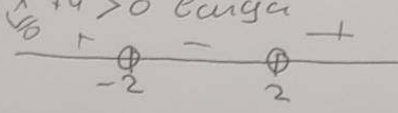
~5

$$a = x^3 - 100x \quad b = x^4 - 16 \quad c = -x^2 + x + 20$$

Среднее из трех чисел положительно \rightarrow много, которое больше или равно его тоже положительно (а по определению среднего такое есть) \Rightarrow как минимум 2 из 3 значений будут положительны. Значит, либо a и b , либо a и c , либо b и c . ~~Тогда~~ Положительности двух не исключает положительности третьего \Rightarrow мы разделим все варианты.

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \begin{cases} x^3 - 100x > 0 \\ x^4 - 16 > 0 \end{cases} \begin{cases} x(x^2 - 100) > 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 4) > 0 \end{cases} \begin{cases} x(x-10)(x+10) > 0 \quad (1) \\ (x-2)(x+2)(x^2+4) > 0 \quad (2) \end{cases}$$

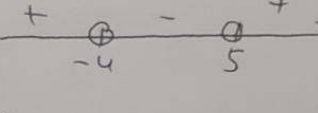
(1)  \Rightarrow решением первого неравенства $(-10; 0) \cup (10; +\infty)$

(2)  \Rightarrow решением второго неравенства $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

\Rightarrow пересечение этих решений и решение системы систем $(-10; -2) \cup (10; +\infty)$

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases} \begin{cases} x^3 - 100x > 0 \quad (1) \\ -x^2 + x + 20 > 0 \quad (3) \end{cases} \begin{cases} (-10; 0) \cup (10; +\infty) \\ (-4; 5) \end{cases}$$

$-x^2 + x + 20 > 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) < 0 \Rightarrow$ решение $(-4; 5)$

$x^2 - x - 20 < 0$  Пересечение этих решений $(-4; 0)$

$$\begin{cases} b > 0 \quad (2) \\ c > 0 \quad (3) \end{cases} \begin{cases} (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ (-4; 5) \end{cases} \quad \underline{\underline{(-4; -2) \cup (2; 5)}}$$

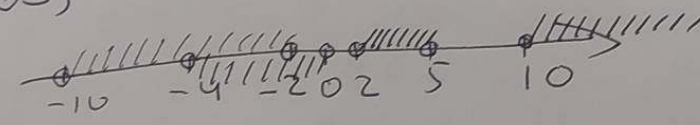
Все решения: $(-10; -2) \cup (10; +\infty)$

$(-4; 0)$

$(-4; -2) \cup (2; 5)$

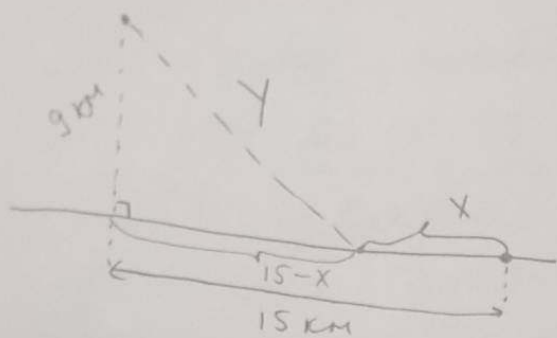
Все решения $(-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$

Ответ: $(-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$



Чистовик

№ 4 $\sigma_n = 50 \text{ км/ч}$ $v_m = 40 \text{ км/ч}$



Нам нужно наименьшее время
 $\Rightarrow \frac{x}{\sigma_n} + \frac{y}{v_m} = \min$

$y^2 = 9^2 + (15-x)^2$ по теореме Пифагора

$y^2 = 81 + 225 - 30x + x^2 - 30x =$

$= x^2 - 30x + 306$ $D_{11} = 15^2 - 306 < 0 \Rightarrow$

\Rightarrow параболы выпуклости вверх и не имеет корней \Rightarrow всегда > 0

$\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{40} = \min$

№ 3

$10^{2022} = \underbrace{10 \dots 0}_{2022}$

на последнем три цифра выводит
 Рассмотри 9^{2022} только последние
 три цифра

$9^1 = \dots 9$
 $9^2 = \dots 1$
 $9^3 = \dots 9$

\Rightarrow цикл длины 2

$2022 : 2 \Rightarrow 9^{2022}$ будет оканчиваться на 1

Далее рассмотрим что происходит со второй цифрой цифрой. На нее выводит вторая цифра предыдущей степени и то, что переносит от предыдущей степени. (а перейти может 8 или 0, т.к. $9 \cdot 1 = 9$ $9 \cdot 9 = 81$)

Будем рассматривать 3 разряда десяти $9^1 \neq 9$ $9^2 = 81$ $9^3 = 729$

- Занесем точки последние цифры
- 1) $0 \cdot 9 + 0 = 0$
 - 2) $0 \cdot 9 + 8 = 8$
 - 3) $8 \cdot 9 + 0 = 2$
 - 4) $2 \cdot 9 + 8 = 6$
 - 5) $6 \cdot 9 + 0 = 4$
 - 6) $4 \cdot 9 + 8 = 4$
 - 7) $4 \cdot 9 + 0 = 6$
 - 8) $4 \cdot 6 \cdot 9 + 8 = 2$
 - 9) $2 \cdot 9 + 0 = 8$
 - 10) $8 \cdot 9 + 8 = 0$
 - 11) $0 \cdot 9 + 0 \Rightarrow$ повторение \Rightarrow цикл длины 10

10 ~~раз~~ $0, 8, 2, 6, 4, 4, 6, 2, 8, 0$. 9^{2022} оканчивается на 2

при генерации на 10 \Rightarrow в разряде десятков будет стоять 8 \Rightarrow последние две цифры $9^{2022} = \dots 81$
 В каждой десятой позиции и в каждой десятке 9^{2022} будет 81, т.к. на 8 выводит 8

Чистовик

~ 3 (задача 2)

к сотням прибавляется 4

\Rightarrow 0 4 8 2 6 В 2022 в 202

лишних единиц \Rightarrow 2022 будет в 203

203 дает остаток 3 \Rightarrow будет 8 \Rightarrow

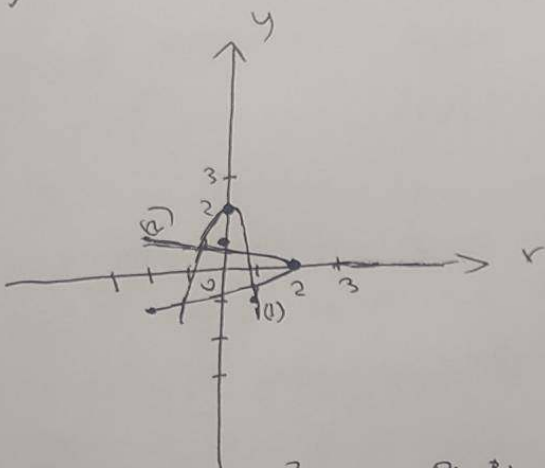
\Rightarrow последние три цифры g_{2022} : 881 \Rightarrow

\Rightarrow последние три цифры $10 \dots 0 - \dots 881 = 119$

Ответ: 119

~ 6

(1) $y = -3x^2 + 2$ $x = -4y^2 + 2$ (2)



Находите на описанном расстоянии \Rightarrow четыре угла вписанный и эта точка А - центр описанной окружности данного четырехугольника

$$x^2 = x^2 \Rightarrow (-4y^2 + 2)^2 = \frac{y-2}{3}$$

$$y = -3x^2 + 2 \quad -3x^2 = y - 2 \quad x^2 = \frac{y-2}{3}$$

$$16y^4 - 16y^2 + 4 = \frac{y-2}{3} \cdot 3$$

$$48y^4 - 48y^2 + 4y - 12 = 0$$

ЧИСТОВИК

~7

Нужно сложить "пакет пакетов" \Rightarrow в одном пакете будет все остальное \Rightarrow будет внешний пакет.

Остаток 9 пакетов, которые нужно как-то сложить во "внешний". Далее рассмотрим сколько пакетов лежит в этом пакете, но не лежит в группе.

Если таких пакетов 9, то группа вложения уже не будет \Rightarrow только 1 способ $((())()()()()()())$

Если таких пакетов 8, то значит какой-то один пакет не лежит внутри тех, кто уже находится во "внешнем" \Rightarrow тоже один способ $((())()()()()())$

Если таких пакетов 7, то остаток еще 2 \Rightarrow они могут лежать в разных, в одном месте, и в одном месте в группе \Rightarrow 3 способа

$((())()()()()())$ $((())()()()()())$ $((())()()()()())$

Если таких пакетов 6, то остаток еще 3 \Rightarrow они могут быть в трех разных, все в одном месте, все в одно место группы в группе, все в одном месте в группе, в двух, но все место, в двух, но группа в группе

$((())()()()()())$, $((())()()()()())$,
 $((())()()()()())$, $((())()()()()())$,
 $((())()()()()())$, $((())()()()()())$

Если таких пакетов 5, то остаток еще 4 \Rightarrow либо в 4 отдельных в 4, либо в 3, тогда еще 2 вал, либо в 2, тогда еще $3+3=6$, либо в одном, тогда еще 1+

ЧЕРКОВИК

~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7~~

n_1
 $: 16 \Rightarrow : 2^4$

1, 2, 3, 4, 5, 6 всего входит $2^4 \Rightarrow$ если хотя бы одно четное число не будет присутствовать, то $/16$

\Rightarrow будет когда впису нест \Rightarrow 3 случая $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

n_2

$1 \leq n \leq 2022$

$$\begin{array}{r} 2022 \overline{) 374} \\ -18 \\ \underline{22} \\ -21 \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2022 \overline{) 374} \\ -18 \\ \underline{22} \\ -21 \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 337 \\ \underline{2} \\ 674 \end{array}$$

В арифметическую прогрессию $1, 3, 5, \dots$ входят числа, которые дают остаток 1 при делении на 2 \Rightarrow 1011 чисел

В арифметическую прогрессию $1, 4, 7, 10$ входят числа, которые дают остаток 1 при делении на 3. Таких чисел 674, по поновлению из них перенесено

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -1348 \\ \hline 674 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 337 \\ \hline 1348 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -1348 \\ \hline 674 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9-1 \quad 6-6 \quad 3 \\ 8-1 \quad 5 \quad 2 \\ 7-3 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

081, 729, 561, 049, 441, 669,
 621, 589, 301, 709, 381, 429,
 861, 749, 74

n_3

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 9 = 81 \\ 81 \cdot 9 = 729 \\ \underline{9} \\ 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \dots 60 \\ \underline{729} \\ 561 \quad 049 \\ \underline{49} \\ 441 \\ \underline{669} \\ 8589 \\ \underline{5301} \\ 89 \\ \underline{429} \\ 861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 621 \\ \underline{069} \\ 621 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 381 \\ \underline{709} \\ 381 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 749 \\ \underline{709} \\ 749 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 749 \\ \underline{749} \\ 749 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 749 \\ \underline{749} \\ 749 \end{array}$$

...

n_5

Чисел поновлению \Rightarrow есть хотя бы два поновлению \times чисел

$$\begin{array}{l} x^4 - 16 > 0 \quad (x^2 - 4)(x^2 + 4) > 0 \\ x + 20 - x^2 > 0 \quad (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) > 0 \end{array}$$

$$-x^2 + x + 20 > 0$$

$$x^2 - x - 20 > 0$$

$$D = 1 + 80 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -4$$

ЧЕРТОВИК

$$y = -3x^2 + 2$$

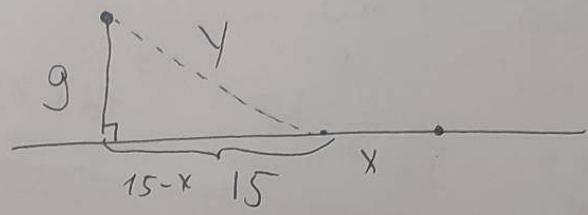
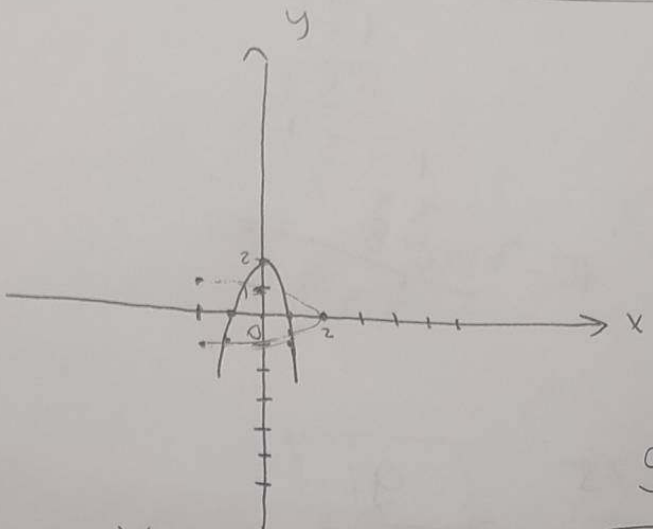
$$x = -4y^2 + 2$$

$$-4y^2 = x - 2$$

$$y^2 = \frac{x-2}{-4}$$

$$V_n = 50 \text{ km/h}$$

$$V_m = 40 \text{ km/h}$$



$$\begin{array}{r} 81 \\ 225 \\ \hline 306 \end{array}$$

$$B) \frac{x}{50} + \frac{y}{40}$$

$$9^2 + (15-x)^2 = 9^2 + 15^2 + x^2 - 30x = \sqrt{x^2 - 30x + 306} = y^2$$

$$\frac{x}{50} + \sqrt{x^2 - 30x + 306} - \text{min}$$

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 9 \\ 81 \\ \hline 729 \\ 3 \\ \hline 441 \\ \hline 969 \\ 7 \\ \hline 481 \\ \hline 329 \\ 589 \\ \hline 121 \\ \hline 801 \\ \hline 209 \\ \hline 169 \\ \hline 581 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 729 \\ \hline 6561 \\ 8 \\ \hline 969 \\ \hline 721 \\ \hline 329 \\ \hline 961 \\ \hline 121 \\ \hline 089 \\ \hline 209 \\ \hline 881 \\ \hline 521 \\ \hline 689 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 561 \\ \hline 049 \\ \hline 721 \\ \hline 489 \\ \hline 961 \\ \hline 649 \\ \hline 801 \\ \hline 929 \\ \hline 361 \\ \hline 789 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \\ \hline 441 \\ \hline 489 \\ \hline 401 \\ \hline 649 \\ \hline 841 \\ \hline 881 \\ \hline 929 \\ \hline 361 \\ \hline 249 \\ \hline 15 \\ \hline 15 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 401 \\ \hline 609 \\ \hline 609 \\ \hline 481 \\ \hline 841 \\ \hline 569 \\ \hline 249 \\ \hline 241 \\ \hline 169 \end{array}$$

- 81, 729, 561, 049,
- 441, 969, 721, 489,
- 401, 609, 481, 961,
- 649, 841, 569, 121, 89,
- 801, 209, 881, 929,
- 361, 249, 24, 169, 521

$$10^{2022} - 9^{2022} =$$

$$= (10^{1011} - 9^{1011})(10^{1011} + 9^{1011})$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - \\ \hline 881 \\ \hline 929 \\ \hline 9 \\ \hline 25 \\ \hline 15 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$15^2 + 9^2 = \frac{\sqrt{306}}{40}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ 269 \\ \hline 421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 225 \\ + 81 \\ \hline 306 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \hline 269 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 526 \\ \hline 349 \\ \hline 141 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 261 \\ \hline 349 \end{array}$$

перевір

$10^{2022} - 9^{2022}$

$\frac{153^{14}}{50} + \frac{9}{40} = \frac{721}{40}$

$\frac{\sqrt{306}}{4840} < \frac{21}{40}$

$9^2 + 12^2 = 15^2$

$144 + 81 = 225$

$\frac{42^{18}}{50} + \frac{15^3}{40} = \frac{16+75}{200}$

$\frac{91}{200}$

$\frac{25}{200}$

$\frac{75}{91}$

$\frac{171}{829}$
 $\frac{1539}{312}$
 $\frac{10-31368}{1759}$

$(10^{1011} - 9^{1011})(10^{1011} + 9^{1011}) =$

$\frac{10000}{3319} - \frac{3319}{681}$ $\frac{10000}{319} - \frac{319}{29}$

$\frac{10000}{29} - \frac{29}{71}$ $\frac{10000}{29} - \frac{29}{29}$

$9^1 = 009$

$9^2 = 081$

$9^3 = 29$

0.1
 $\cdot 9$

$(0.9 + 8 = 8) \quad (9 + 8 = 6) \quad (4.9 + 8 = 4)$
 $(8.9 + 0 = 2) \quad (6.9 + 0 = 4) \quad (4.9 + 0 = 6)$
 $(6.9 + 8 = 2) \quad (8.9 + 8 = 0) \quad (0.9 + 8 = 8)$
 $(2.9 + 0 = 8) \quad (0.9 + 0 = 0)$

82644628008

урач

29

10

$\frac{71}{29}$
 $\frac{81}{9}$
 $\frac{639}{142}$
 $\frac{2059}{29}$

$\frac{10013}{337}$