МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Старков Михаил Ильич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	0	15	15	5	15

пусть $tg x = t$ №6.

$at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=(t-1)(at^2+(1-2a^2)t-2a)$

Заметим, что ~~t=1~~ при $t=1$ выражение равно нулю

$$\begin{array}{l|l} at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a & t-1 \\ \underline{at^3-at^2} & at^2+(1-2a^2)t-2a \\ (1-2a^2)t^2 & \\ \underline{(1-2a^2)t^2-(1-2a^2)t} & \\ -2at+2a & \\ \underline{-2at+2a} & \\ 0 & \end{array}$$

$at^2+(1-2a^2)t-2a$

$D=(1-2a^2)^2+8a^2=(1+2a^2)^2$

$\sqrt{D}=1+2a^2$ т.к. под скобками положительное число

$t_{1,2}=\frac{2a^2-1\pm(1+2a^2)}{2a}$

$t_1=2a \qquad t_2=-\frac{1}{a}$

тогда исходное выражение равно $(t-1)(t-2a)(t+\frac{1}{a})$, т.е. 1, $2a$ и $-\frac{1}{a}$ – его корни.

Разберем несколько случаев

1). случай $a\le -1$

тогда $2a\le -2$

$-\frac{1}{a}\in(0;1]$

тогда искомое расстояние – это $1-2a$ и оно минимально, если $a=-1$, мин. раст. тогда равно 3 (достиг. при $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{2}$) $x_1=\frac{\pi}{4}$ $x_2=-\frac{\pi}{4}$

2) $-1<a<0$

$2a\in(-2;0)$ т.к. $|arctg\, 2a|>\frac{\pi}{4}$ и $|arctg -\frac{1}{a}|>\frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{a}\in(1;+\infty)$ здесь $|x_1-x_2|>\frac{\pi}{2}$

иск. раст. – это $-\frac{1}{a}-2a$, и оно больше 3

3). $0<a\le 1/2$

$2a\in(0;1]$

$-\frac{1}{a}\in(-\infty;-2]$

иск. раст – это $1+\frac{1}{a}$, оно не меньше 3

здесь $|x_1-x_2|\ge\frac{\pi}{2}$

т.к. $|arctg 1|\ge\frac{\pi}{4}$ и $|arctg -\frac{1}{a}|\ge\frac{\pi}{4}$

~~т.к. рассматриваются корни из $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, то расстояние между аргументами тангенсов минимально, когда расстояние между тангенсами минимально~~

4). $\frac{1}{2}<a$

$2a\in$ ~~(1;+∞]~~ $(1;+\infty)$

$-\frac{1}{a}\in$ ~~(-2;0]~~ $(-2;0)$

иск. раст. – это $2a+\frac{1}{a}$

$(2a+\frac{1}{a})'=2-1/a^2$

$2-\frac{1}{a^2}=0$ при $a=\frac{1}{\sqrt2}$

<0 при $a<\frac{1}{\sqrt2}$

>0 при $a>\frac{1}{\sqrt2}$

тогда наим зн. на ~~отрезке~~ промежутке $(\frac{1}{2};+\infty)$ достигается в точке $\frac{1}{\sqrt2}$

$\frac{2}{\sqrt2}+\frac{1}{1/\sqrt2}=2\sqrt2<3$

$2\sqrt2$ достигается при $2a=\sqrt2$, $a=\frac{1}{\sqrt2}$ $\quad -\frac{1}{a}=-\sqrt2$

$arctg\sqrt2>\frac{\pi}{4}$

$tg x_1=\sqrt2$

$tg x_2=-\sqrt2$

$|x_1-x_2|=2arctg\sqrt2$ здесь $|x_1-x_2|>\frac{\pi}{2}$

Ответ: ~~2arctg√2~~ $\frac{\pi}{2}$ при $a=-1$

Чистовик 1

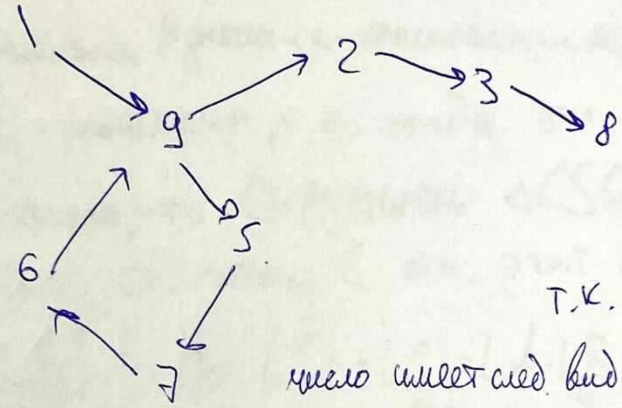
~~Все~~

№2.

кратные 19: 19 38 57 76 95

кратные 23: 23 46 69 92

Построим граф, показывающий какие цифры могут стоять за какими



Заметим, что если после какой-то девятки стоит двойка, то после этой девятки стоит не более 3 чисел.

Т.к. первая цифра числа - это 9, то число имеет след. вид:

95769576…9576…

Блок 9576 ставится до тех пор, пока ~~не~~ не непроставленных цифр останется ≤4, ведь иначе, если после какой-то девятки поставится 2, то еще через две цифры получится число, которое нельзя продолжить (т.к. возникнет 8) (т.е. 9 после которой стоит 2 должна стоять левее 4с ~~четвертой~~ третьей с конца позиции) (если такая есть) (с другой стороны, 9 стоит на всех позициях, равных с 2020 по модулю 4)

тогда возможно только 2 случая:

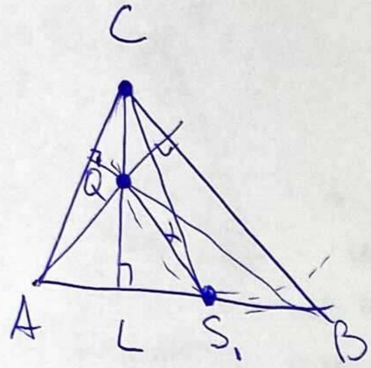
$\underbrace{95769576\ldots957695}_{2020\ \text{цифр}}$ и $\underbrace{95769576\ldots957692}_{2020\ \text{цифр}}$

т.е. число может заканчиваться на 5 или 2

Ответ: 2, 5

Чистовик 2

№7.



Поймем сначала, как устроена точка S.
Возьмем на AB какую-то точку S_1 и
рассмотрим окружность описанную около $\triangle CQS_1$ (пусть R - ее радиус) $\alpha = \angle CS_1Q$
по т. синусов

т.е.

$CQ = 2R\sin\alpha$ $\quad \sin\alpha = \frac{2R}{CQ}$

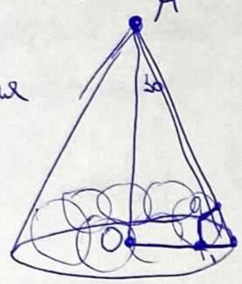
$\sin\alpha$ максимален (а значит и α - максимален, т.к. $\alpha \in (0;180)$)
тогда, когда R - минимален, т.е. когда эта окружность касается AB.
~~если~~ т.е. S такова, что Окружность $\triangle CSQ$ касается AB.
тогда записывая ст. точки L отн. этой окр:
$LQ \cdot LC = LS^2$. Но $LQ \cdot LC = LA \cdot LB$ т.к. если отразить Q отн. AB,
то точка попадет на окр. $\triangle ABC$ и эти величины просто равны
степени точки L отн. окр. $\triangle ABC$.
тогда $LS = \sqrt{LA \cdot LB} = \sqrt{10}$ такая точка S существует т.к.
$LA = 2 < \sqrt{10} < 5 = LB$, т.е. S лежит на LB т.е. и на отрезке AB такая точка существует.

Ответ: $\sqrt{10}$

Чистовик 3

A – вершина конуса

O – центр основания



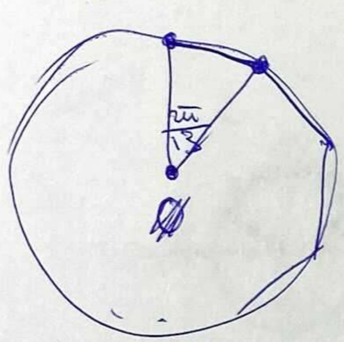
№4.

пусть $O_1, O_2, \dots, O_{13}$ – центры шаров. $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13}$

т.к. ~~ω_i и ω_{i+1} к~~ соседние шары касаются, то их точка их касания и их центры лежат на одной прямой. Т.к. все шары касаются плоскости основания и их радиусы равны, то все центры лежат в одной плоскости.

Вместе с этим, ~~все к~~ каждый шар касается боковой поверхности конуса. Тогда все центры образуют правильный 13-угольник (со стороной 4)

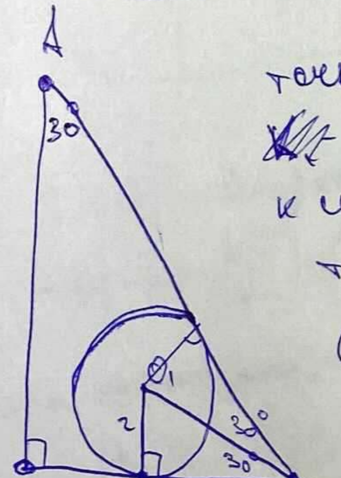
найдем радиус его оп. окр:



2+2 (сторона многоугольника)

$$2R\cdot\sin\frac{\pi}{13}=4$$

$$R=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}$$



пусть шар ω_1 касается плоскости основания в точке T_1. K_1 в плоскости AOO_1T такова, что AK_1 – касательная к ω_1.

тогда OK_1 – радиус основания конуса

$$OK_1 = OT_1 + T_1K_1 = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + O_1T_1\cdot \operatorname{ctg}\angle O_1K_1T_1 = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$$

$$OK_1 = 2\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}}\right)$$

Ответ: $2\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}}\right)$

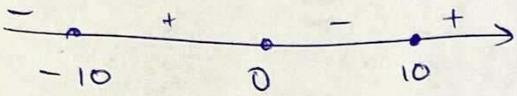
Чистовик 4

№5.

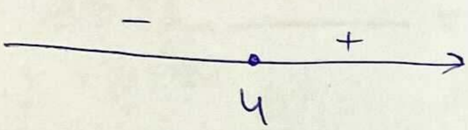
Посмотрим когда каждое из чисел какого знака

условие равносильно тому, что среди a, b, c хотя бы 2 положительных

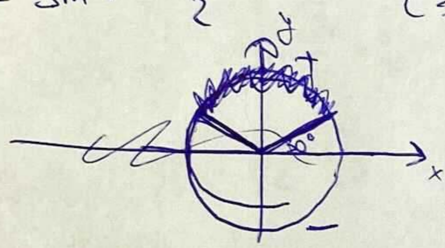
$a = t^3 - (100t) = t(t-10)(t+10)$



$b = 2^t - 16$



$c = \sin t - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $c \geq 0$ при $t \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$



~~Кот~~

Найдем сначала $t \leq 4$:

$b \leq 0 \Rightarrow a > 0, c > 0$

$a > 0 \Rightarrow t \in (-10, 0)$

$c > 0 \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$

$k \geq 0$ не подходят

1). $k = -1$
весь промежуток $\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$ лежит внутри $(-2\pi; -\pi)$, который лежит в $(-7; -3)$, который лежит в $(-10, 0)$

2). $k \leq -2$
правый конец промежутка $\left(2\pi k + \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right)$ лежит ~~левее~~ правее −10

т.к. $-4\pi + \frac{5\pi}{6} = -3\pi - \frac{\pi}{6}$

а $3\pi + \frac{\pi}{6} < 3{,}15 \cdot 3 + \frac{3{,}15}{6} =$

$= 9{,}45 + \frac{315}{600} =$

$= 9{,}45 + \frac{21}{40} = 9{,}45 + 0{,}525 < 10$

левый конец правее.

тогда входит промежуток $\left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

3). при $k \leq -3$ промежуток $\left(2\pi k + \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right)$ не имеет общ. т. с $(-10; 0)$

при $t \leq 4$ подходят промежутки

$\left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$ т.к.

Найдем ~~промежутки~~ теперь $t > 4$. Если $t > 4$, то a или c > 0

1). $a > 0 \Rightarrow t > 10$

2). $c > 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ имеет общ. т. с $(4; +\infty)$

при $k \leq 0$ не имеет. лежит внутри $(4; +\infty)$

при $k \geq 1$, каждый промежуток ~~...~~

$(10; +\infty)$ и $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ по всем $k \in \mathbb{N}$

Объединение

это $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \cup (10; +\infty)$

тогда Ответ в задаче - это $\left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \cup (10; +\infty)$

Чистовик 5

№1.

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$A = \sum_{n=1}^{49} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{49}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{50^2} < 1$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{\left(1-\frac{3}{4}\right)} \cdot \sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} > 1$$

тогда $A < 1 < B$ и $A < B$

Ответ: B.

Чистовик 6

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$at^3+(1-a-2a^2)t^2$

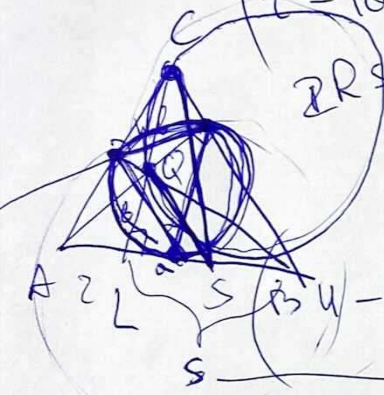
$\sqrt[6]{1-\frac{\sqrt3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}$

$\frac{1}{(1\cdot2)^2}+\frac{2}{(1\cdot2)^2}+\frac{2}{(2\cdot3)^2}$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$

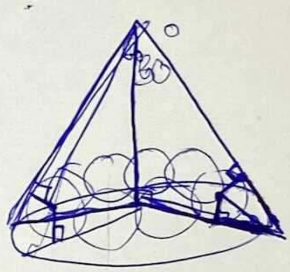
$\cancel{a}+\cancel{1}-\cancel{a}-\cancel{2a^2}+\cancel{2a^2}-\cancel{2a}-\cancel{1}+\cancel{2a}=0$

$(t^3-100t)(2^t-16)(\sin t-\frac{1}{2})\leq 0$



$2R\sin\alpha=const$

$\frac{C\cdot a}{2}=\frac{CS\cdot CQ}{2}\cdot\sin\alpha$



$(4-2\sqrt3)(\sqrt3+1)(\sqrt3+1)$

$\frac{a}{CS\cdot CQ}$, макс.

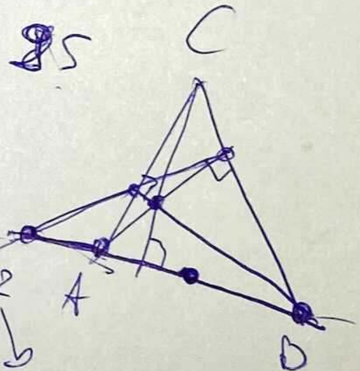
2^3

$\frac{49}{(49\cdot50)^2}=\frac{1}{49\cdot50^2}$

$b(n-b)=10$

:19 19 38 57 76 95

:23 23 46 69 92



95 → 57 → 76 → 69 → 92 → 23 → 38

9

$\underbrace{9576\,9576\,9576\ldots9576}_{2020\text{ цифр}}9$

Черновик 1

$\operatorname{tg}x_1-\operatorname{tg}x_2=2\sqrt{2}$

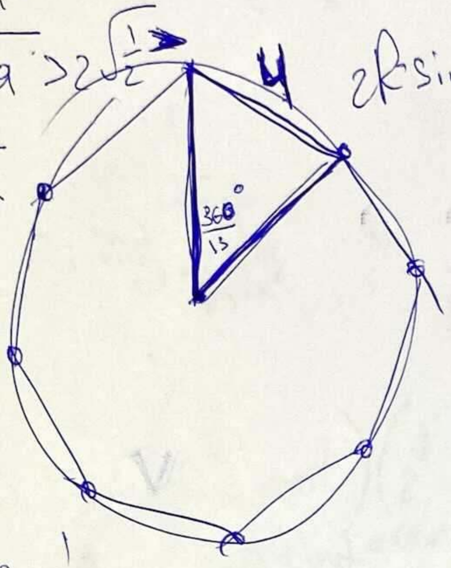
$x_1-x_2=?$

13 сторон

$:19 \quad 19 \quad 38 \quad 57 \quad 76 \quad 95$

$:23 \quad 23 \quad 46 \quad 69 \quad 92$

$2a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a}>2\sqrt{\frac{1}{2}}$



$2R\sin\frac{180^\circ}{13}=4$

$\frac{1}{|a|}+2|a| \quad \frac{\frac{1}{|a|}+2|a|}{2}\geq\sqrt{|a|}$

$\frac{1}{a}+a+a\geq 3\sqrt[3]{a}$

$R=\frac{2}{\sin\frac{180^\circ}{13}}$

$-\frac{1}{a}-2a\geq 3$

$\frac{\frac{1}{|a|}+|a|+|a|}{3}\geq\sqrt[3]{|a|}\geq$

$2a+a^{-1}$

95 → 57 → 76 → 69 → 95

19 → 95

19 → 92 → 23 → 38

69 → 92

$2-\frac{1}{a^2}$

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2a \quad a>1$

2 или 5

t^3-100t

2^t-16

$\sin t=\frac{1}{2}$

$2a\in(2;+\infty)$

$-\frac{1}{a}\in(-1;0)$

$t(t-10)(t+10)$

$(t-4)$

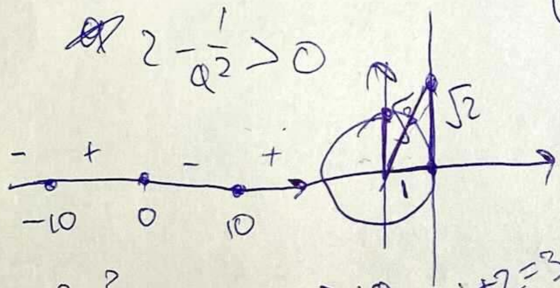
$\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$2-\frac{1}{a^2}>0$

или

$(\operatorname{tg}x-1)(t$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi k$



$2a^2>1$

$t>10$

$1+2=3$

$(at^2+(1-2a^2)t-2a)(t-1)=0$

$a^2>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}+2\pi k>10$

$D=(1-2a^2)^2+8a^2=(1+2a^2)^2$

$a>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$

$\frac{2a^2-1\pm(1+2a^2)}{2a}$

$a\operatorname{tg}^3x($

$ax^3+(1-a-2a^2)x^2+(2a^2-2a-1)x+2a \;|\; x-1$

$\underline{ax^3-ax^2} \qquad ax^2+(1-2a^2)x-2a$

$(1-2a^2)x^2$

$\underline{(1-2a^2)x^2-(1-2a^2)}$

$-2ax+2a$

$2-\frac{1}{a^2}\geq 0$

$2a, -\frac{1}{a}, 1$

$2a^2\geq 1$

$a^2\geq\frac{1}{2}$

$(ax^2+(1-2a^2)x-2a)$

$ax^3+(1-2a^2)x^2-2ax-ax^2-(1-2a^2)x+2a$

$ax^3+(1-a-2a^2)x^2+(2a^2-2a-1)+2a$

$a>\frac{1}{\sqrt{2}}$

Черновик 2

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \cancel{\sqrt[6]{1-\sqrt{3}}}$$ $\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$

$n+n+1 \geq 2\sqrt{n(n+1)}$

$\cancel{\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}}$

$\operatorname{tg}x_1-\operatorname{tg}x_2 \geq 3 \Rightarrow$ $\quad \frac{5}{36}+\frac{7}{144} \overset{?}{>} \frac{1}{4}$ $\quad \frac{7}{3\cdot 4}$ $\quad \frac{2}{(\sqrt{n(n+1)})^3}$

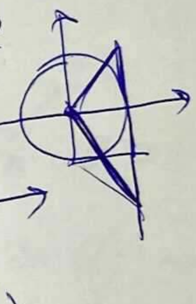
$|x_1-x_2| > 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ $\quad \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}\cdot$

$x \cdot \frac{21}{2{,}5}$ $\quad \frac{\pm 50}{525}$

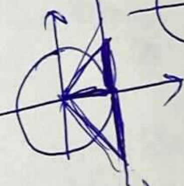
$\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$ $\quad \sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\quad n(n+1)\leq\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{\sin x_1\cos x_2-\sin x_2\cos x_1}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\cos x_1\cos x_2}$ $\quad \cancel{\sqrt[3]{2}}$

$=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[6]{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$



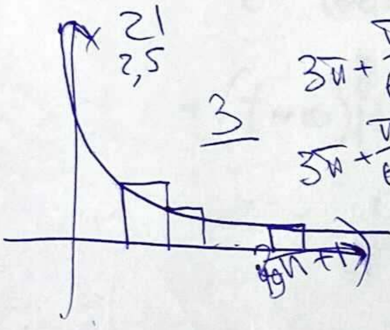
$2-\frac{1}{a^2}\geq 0$



$\frac{21}{2{,}5}$ $\quad 3\pi+\frac{\pi}{6} \vee 10$ $\quad 2a^2>1$

3 $\quad 3\pi+\frac{\pi}{6} < 3\cdot 3{,}15+\frac{3{,}15}{6}=9{,}45+\frac{315}{600}$

$\frac{n}{}$ $\quad a^2>\frac{1}{2}$



$\operatorname{tg}(n+1)$

$\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$ $\quad \frac{63}{100}$ $\quad \frac{(2n+1)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{n+\frac{1}{2}}$

$\frac{x}{1}+\frac{2}{2}$ $\quad \frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}$ $\quad \frac{a}{n(n+1)}+\frac{b}{n(n+1)}$ $\quad \cancel{n(n}$ $\quad \frac{n+(n+1)}{}$ $\quad \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=$

$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

$\frac{a}{n^2}+\frac{b}{(n+1)^2}$ $\quad \frac{n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}$ $\quad \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}\geq\frac{2}{n}$

$\int\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=$

$\frac{1}{(n+1)^2}$ $\quad \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}\geq$ $\quad 2n^2+n\overset{?}{\geq}n$

$\frac{2n+1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{2\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}$ $\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}\geq\frac{2n+1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}$ $\quad \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-2}}{-2}$

$1-\frac{1}{(50{,}2)^2}$ $\quad -2(50{,}2)^2$ $\quad \frac{1}{-(50{,}2)^2}$

Черновик 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

Черновики