МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сударев Иван Олегович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	10	10	15

Чистовик.

01

Задача 1

$$A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{89}{(44\cdot45)^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

Преобразуем $A=\sum\limits_{n=1}^{44}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$.

Заметим, что $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Значит, $A=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{43^2}-\frac{1}{44^2}+\frac{1}{44^2}-\frac{1}{45^2}=$
$=1-\frac{1}{45^2}$

Преобразуем B.

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

Заметим, что $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt[6]{3+1+2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$.

Значит, $B=\frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2^{2/6}}{2^{1/3}}=1$.

Но $A=1-\frac{1}{45^2}<1=B$.

Ответ: A меньше B.

02

Чистовик

Задача 2

Рассмотрим все двузначные числа, делящиеся на 23 или 19.

23	19
46	38
69	57
92	76
	95

, пусть $M = \{19, 38, 57, 76, 95, 23, 46, 69, 92\}$

Пусть загаданное число $n = \overline{1a_{2019}a_{2018}\ldots a_2a_1a_0}$, a_i – цифры

$\overline{1a_{2019}}$ не может $\vdots 23$, значит, оно $\vdots 19 \Rightarrow a_{2019} = 9$

$n = \overline{19\ldots\ldots a_0}$

применяя условие для $\overline{a_{2019}a_{2018}}$, $\left[\begin{array}{l} a_{2018} = 2 \\ a_{2018} = 5. \end{array}\right.$

Предположим, $a_{2018} = 2$

Тогда, применяя усл. для $\overline{a_{2018}a_{2017}}$ получим, что $a_{2017} = 3$.

для $\overline{a_{2017}a_{2016}}$ получим, что $a_{2016} = 8$.

Но заметим, что в M нет чисел, начинающихся на 8.

Значит, для числа $\overline{a_{2016}a_{2015}}$ возникает противоречие.

Таким образом, $a_{2018} \neq 2$, а значит, $a_{2018} = 5$.

Итак, $n = \overline{1\underbrace{9576}9a_{2014}\ldots a_0}$

эти цифры однозначно восстанавливаются.

У a_{2014} снова два варианта $\left[\begin{array}{l} a_{2014} = 2 \leftarrow \text{в этом случае возникает противоречие, аналогичное рассмотренному выше.} \\ a_{2014} = 5 \end{array}\right.$

(не найдется варианта для a_{2011})

Значит, $a_{2014} = 5$ и $n = \overline{1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots a_0}$

Заметим, что рассуждая аналогично, мы однозначно восстановим n до вида $n = \overline{1\underbrace{9576}_{}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}9a_2a_1a_0}$

504 блока $\underbrace{9576}$

Предполагая, что после 9-ки стоит $a_k = 2$, а не $a_k = 5$, мы будем получать, что для числа a_{k-3} нет вариантов.

Для $k = 2$ это рассуждение уже не применимо, т.к. $k-3 = -1$.

Таким образом, если $a_2 = 2$, то $a_1 = 3$ и $a_0 = 8$.

если $a_2 = 5$, то $a_1 = 7$ и $a_0 = 6$.

Понятно, что оба варианта $n = 1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}9238$

504 блока $\underbrace{9576}$

и $n = 1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}\underbrace{9576}$ подходят под условие.

505 блоков $\underbrace{9576}$

Значит, a_0 может быть 6 или 8.

Ответ: 6 или 8.

Задача 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$f(f\dots f(2022)\dots))$ — ?

1304 применений f.

Вычислим 1) $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-f(x)^7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{\dfrac{1-x^7}{-x^7}}=\dfrac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$

2) $f(f(f(x)))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-(f(f(x)))^7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}}=x$

Обозначим через $f^n(x)=\underbrace{f(f\dots f(x))\dots))}_{n \text{ применений функции } f}$, при $n=0$, $f^0(x)=x$

Мы поняли, что $f^3(x)=x$.

Тогда $f^4(x)=f(x)$

$f^5(x)=f(f(x))=f^2(x)$

$f^6(x)=f^3(x)=x$

$\vdots$

$f^n(x)=f^r(x)$, где r — остаток при делении на 3 числа n.

Мы хотим найти $f^{1304}(2022)=f^2(2022)$, т.к. $1304\equiv_3 2$.

Итак, $f^{1304}(2022)=f^2(2022)=\dfrac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}}$.

Ответ: $\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}}$.

05

Чистовик

Задача 4

R - радиус окр-ти основания

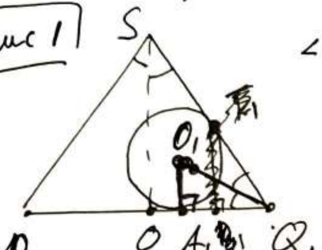
Пусть S - вершина конуса,

$O_1, \dots, O_{13}$ - центры ~~…~~ шаров,

O - центр окружности основания конуса.

Рассмотрим сечение (осевое) конуса, содержащее O_1.

рис 1



$\angle P_1SQ_1 = 60^\circ$, $SP_1 = SQ_1 \Rightarrow \Delta SP_1Q_1$ - правильный

шар с центром в т. O_1 в этом сечении будет окружностью радиуса 2 (окр-ть ω_1), вписанной в угол SQ_1P_1 или SP_1Q_1 (Пусть в SQ_1P_1)

$OQ_1 = R$

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ - проекции $O_1, \dots, O_{13}$ на плоскость окружности основания конуса.

т.к. ω_1 вписана в $\angle SQ_1P_1$, $\angle A_1Q_1O_1 = \angle O_1Q_1S = 30^\circ$.

Тогда, из пр/уг. $\Delta^{\text{ка}}$ $O_1A_1Q_1$, $A_1Q_1 = O_1A_1 \cdot ctg\, 30^\circ = 2\sqrt{3}$.

~~рис 2~~

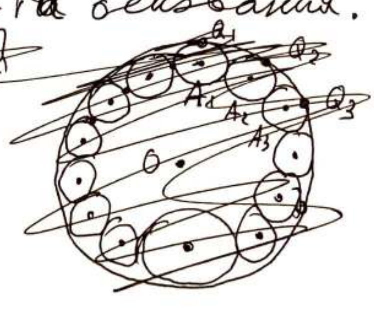
Заметим, что радиус ω_1 не больше радиуса вписанной в ΔSP_1Q_1 окружности, т.к. иначе, шар с центром в O_1 не весь лежит внутри конуса, т.к. ω_1 пересекает SP.

Значит, точки O, A_1, Q_1 расположены именно в таком порядке.

В частности, $R \geq 2\sqrt{3}$.

Рассмотрим проекцию всех шаров на плоскость окр-ти основания.

~~рис 2~~

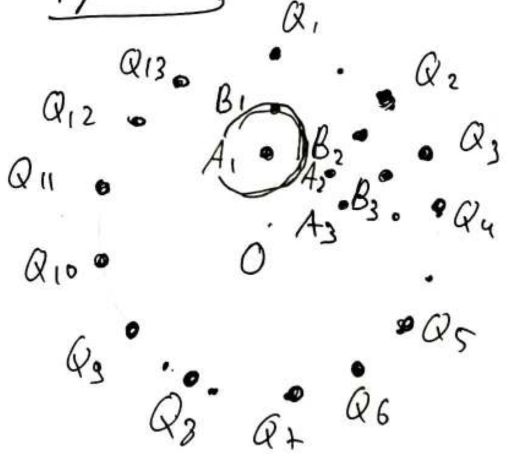


Все шары спроецируются в окружности с центрами $A_1, \dots, A_{13}$ и радиусами 2

Чистовик

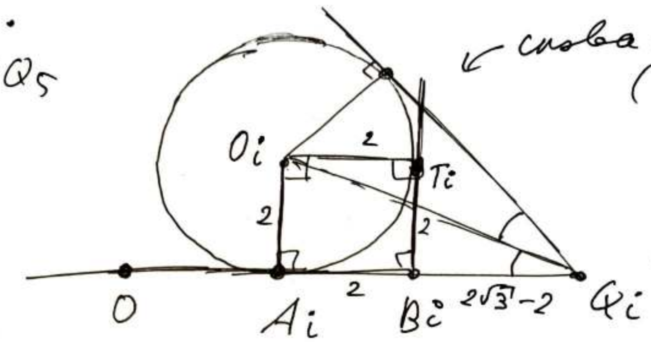
06

рис 2



Определим точки B_i так:

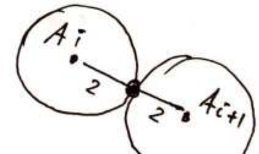
$(SP_iQ_i) \ni B_i$, $B_i \in [A_iQ_i]$ и касательная к ω_i из точки $B_i \perp P_iQ_i$



Заметим, что $O_iT_iB_iA_i$ – квадрат, тогда $A_iB_i = 2$ и $B_iQ_i = 2\sqrt{3} - 2$, а $OB_i = R - 2\sqrt{3} + 2$.

Все шары при проекции на плоскость основания проецируются в окружности с центрами A_i, радиуса 2 и содержащие B_i. Пусть это окр-ти Ω_i.

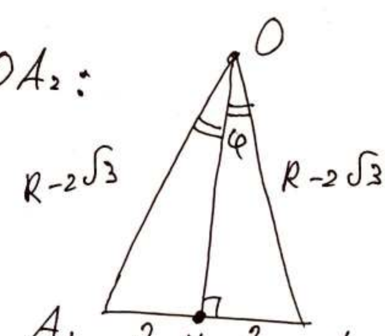
Ω_i попарно касаются.



Заметим, что $A_iA_{i+1} = 4$, а $OA_i = R - 2\sqrt{3}$.

Таким образом, $A_1 \ldots A_{13}$ – правильный 13-тиугольник с центром O.

Рассмотрим $\triangle A_1OA_2$:



$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{13}$, т.к. $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_{13}OA_1 = \frac{2\pi}{13}$.

$\varphi = \frac{\pi}{13}$

тогда $2 = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) \cdot \left(R - 2\sqrt{3}\right)$

Итак, $R = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos(\pi/13)}$

Ответ: $2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos(\pi/13)}$.

Чистовик

(07)

Задача 5

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

Лемма: среднее из (трех) чисел $>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ какие-то два из этих трех чисел >0.

Док-во:

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3$ и $x_2 > 0$

Тогда $x_3 \ge x_2 > 0 \Rightarrow x_3 > 0$

$\begin{cases} x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{cases}$, что и требовалось

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть какие-то два числа из x_1, x_2, x_3 положительны.

Пусть ~~это~~ x_2 и x_3.

если $x_1 > 0$, то все числа >0 и среднее тоже >0

если $x_1 \le 0$, то $\begin{matrix} x_1 \le 0 < x_2 \\ x_1 \le 0 < x_3 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ среднее – ~~это~~ x_2 или x_3 $\Rightarrow$ среднее число >0, что и требовалось.

Итак, требуется решить 3 системы и ~~об~~ъединить их решения:

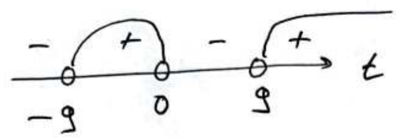
1) $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} c > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

Для начала решим неравенства $a>0$, $b>0$, $c>0$.

$a>0$: $t(t-9)(t+9)>0$ $\quad t\in(-9;0)\cup(9;+\infty)$.

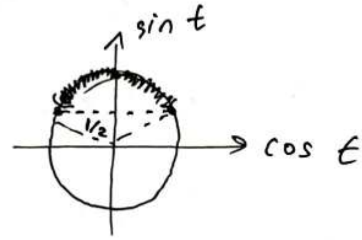


$b>0$: $11^t-121>0$

$t\in(2;+\infty)$, т.к. $f(x)=11^x \nearrow$ при $x\in\mathbb{R}$.

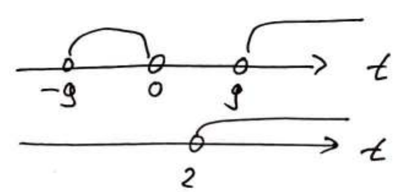
$c>0$: $\sin t-\frac{1}{2}>0$

$\sin t>\frac{1}{2}$



$t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Решим систему 1): $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$



$t>9$ — решение

Решим систему 2): $\begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases}$ $\begin{cases} t>2 \\ t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Пусть $I_k=\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

При $k\le -1$, I_k содержит только числа, <0.

При $k=0$, $I_k=\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. т.к. $\frac{5\pi}{6}>\frac{5\cdot 3}{6}=2,5$, а $\frac{\pi}{6}<1$,

I_0 содержит 2.

При $k\ge 1$, I_k содержит только числа, >2, т.к. $\frac{\pi}{6}+2\pi k\ge\frac{\pi}{6}+2\pi>2$.

(т.е. $\forall t\in I_k$, $t>2$)

Решение системы 2): $t\in\left(2;\ \frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$,

$k\in\mathbb{N}$.

Чистовик

Решим систему 3): $\begin{cases} c>0 \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in I_k,\ k \in \mathbb{Z} \\ t \in (-9;0) \cup (9;+\infty). \end{cases}$

Если $k \le -2$, то I_k содержит числа, меньшие $\frac{5\pi}{6} - 4\pi = \frac{-19\pi}{6}$.

Заметим, что $\frac{-19\pi}{6} \overset{?}{<} -9$

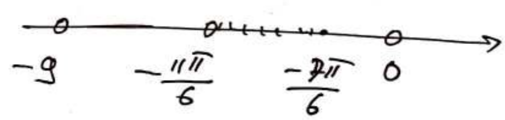
$-19\pi \overset{?}{<} -54$

$54 \overset{?}{<} 19\pi$ верно, т.к. $19\pi > 19 \cdot 3 = 57$.

Если $k \ge 3$, то I_k содержит числа, большие $\frac{\pi}{6} + 6\pi > 9$.

Рассмотрим $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

$k=-1$. $I_{-1} = \left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{-7\pi}{6}\right) \subset (-9;0)$



$k=0$. $I_0 = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. $I_0 \cap (-9;0) = \varnothing$

$I_0 \cap (9;+\infty) = \varnothing$

$k=1$, $I_1 = \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$ $I_0 \cap (-9;0) = \varnothing$,

т.к. $\frac{17\pi}{6} \overset{?}{<} 9$

$17\pi \overset{?}{<} 54$ верно, т.к. $\pi < 3{,}1416$.

$17\pi < 3{,}1416 \cdot 17 = 51 + 0{,}1416 \cdot 17 =$

$= 53{,}4072 < 54$.

, то $I_0 \cap (9;+\infty) = \varnothing$

$k=2$. $I_2 = \left(\frac{25\pi}{6}; \frac{29\pi}{6}\right)$. $I_2 \cap (-9;0) = \varnothing$

$I_2 \cap (9;+\infty) = I_2$,

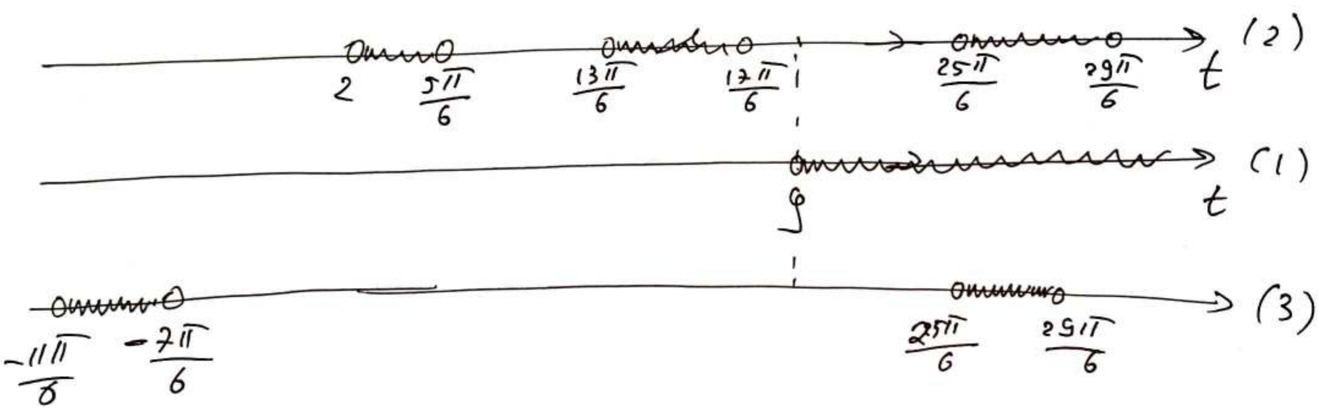
т.к. $\frac{25\pi}{6} > 12{,}5 > 9$.

Решение системы 3): $t \in I_k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $k \le -1$

или $k \ge 2$

Итак, нужно решить совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > 9 \quad (1) \\ t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup I_k,\ k \ge 1 \quad (2) \\ t \in I_k,\ k \le -1 \text{ или } k \ge 2 \quad (3) \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty) \cup I_k$, $k \le -1$ или $k = 1$

$k \in \mathbb{Z}$

Чистовик

Задача 6

Пусть $\operatorname{tg} x = t$. При $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

$$at^3 + (1 - a - 2a^2)t^2 + (2a^2 - 2a - 1)t + 2a = 0$$

$$2a^2(t - t^2) + a(t^3 - t^2 - 2t + 2) + t^2 - t = 0$$

$$2a^2 t(1-t) + a(t-1)(t^2-2) - t(1-t) = 0$$

$$\left(2a(1-t) - t(1-t)\right)(ta+1) = 0 \quad (1-t)(2a-t)(ta+1) = 0$$

При $t = 1$ равенство верно.

$\boxed{\text{сл1}}$ $a = 0$ $(1-t)(-t)(0+1) = 0$

$t = 0$ и $t = 1$ – корни

$x = 0$, $x = \pi/4$

$\boxed{\text{сл2}}$ $a \neq 0$ корни: $t = 1$, $t = 2a$, $t = -\frac{1}{a}$

расстояние между корнями (по t): $|2a - 1| = d_1$

$|1 + \frac{1}{a}| = d_2$

$|2a + \frac{1}{a}| = d_3$

Заметим, что $\forall a \neq 0$, $\max(d_1, d_2, d_3) \geq d_3$.

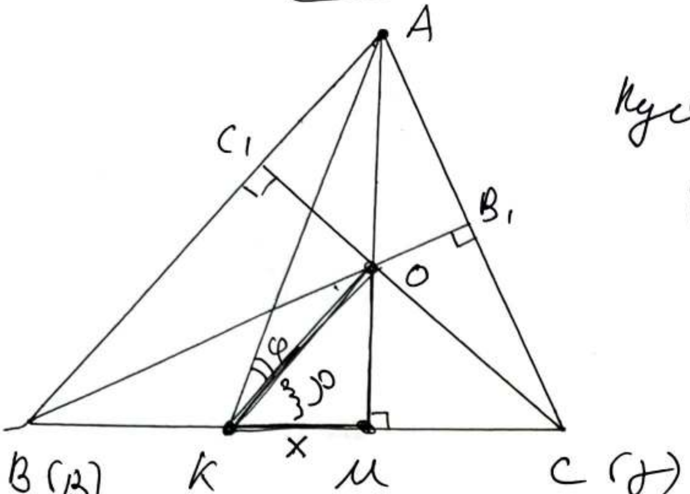
Если $a > 0$, то $d_3 = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$ (нер-во Коши)

Если $a = -b$, $b > 0$, то $d_3 = -2a - \frac{1}{a} = 2b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{2}$ (нер-во Коши)

Значит, $\max(d_1, d_2, d_3) \geq 2\sqrt{2}$

Чистовик

Задача 7



Пусть $AM = 15t$.

Тогда $tg\,\beta = 3t$,

$tg\,\gamma = 5t$.

Пусть $KM = x$.

$K \in [BM]$ или $K \in [CM]$.

$\angle OKM = \rho$

~~Заметим, что $\triangle OMC \sim \triangle BC_1C$~~. $x \in [-3; 5]$

~~$OM = BC_1 \cdot CM$~~

Из прямоуг. △-ка BOM, $OM = BM \cdot tg(90^\circ - \gamma) = 5 \cdot \frac{1}{5t} = \frac{1}{t}$

Из $\triangle OKM$, $tg\,\rho = \frac{OM}{KM} = \frac{1}{tx}$

Из $\triangle AKM$, $tg(\varphi+\rho) = \frac{AM}{KM} = \frac{15t}{x}$

$$tg(\varphi) = tg(\varphi+\rho-\rho) = \frac{tg(\varphi+\rho) - tg(\rho)}{1 + tg(\varphi+\rho)\,tg(\rho)} = \frac{\frac{15t}{x} - \frac{1}{tx}}{1 + \frac{15}{x^2}} =$$

$$= \frac{15tx - \frac{x}{t}}{x^2+15}$$

$tg(\varphi) \to max \iff \varphi \to max$, т.к. $tg(\varphi) \nearrow$ при $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$.

$$tg(\varphi)'_x = \frac{(15t - \frac{1}{t})(x^2+15) - x(15t - \frac{1}{t}) \cdot 2x}{(x^2+15)^2} =$$

$$= \frac{(15t - \frac{1}{t})(15 - x^2)}{(x^2+15)^2} = \frac{40 \cdot (15 - x^2)}{(x^2+15)^2}$$

$-$ $+$ $-$

$-\sqrt{15}$ $\quad -3 \quad$ $\sqrt{15}$ $\quad 5 \quad x$

↘ ↗ ↘

$x = \sqrt{15}$ – т. максимума.

(Чистовик.)

Итак, $x=\sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{15}$

$\boxed{14}$

$t^2(t-1)-2(t-1)=$

$x_1 \le x_2 \le x_3$ $\quad$ ~~$11^3=1331 \quad 121=1$~~ Церковь

$x_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 > 0$ $\quad$ $t^3-t^2-2t+2=$

$=t^2(t-1)-2(t-1)=(t^2-2)(t-1)$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$k=0$

$\frac{5\pi}{6}-2\pi=$ $\quad$ $\frac{5\pi}{6}\approx 2,5$ $\quad$ $(1-t)(t^2-2)+(1-t)(t^2+2)=$

$=2t^2(1-t)$

$=-\frac{7\pi}{6}$ $\quad$ $\pi=3,14,15$ $\quad$ $5-12=-2$

$(1-t)(t^2-2)\pm(t-1)(t^2+2)$

$\frac{\pi}{6}+\cdot$ $\quad$ $\frac{\pi}{6}-2\pi$

$(1-t)(t^2-2)-(1-t)(t^2+2)=$ $\quad$ $17\cdot 3,2=$

$3,1416\cdot 17=$ $\quad$ $=(1-t)\cdot 4$ $\quad$ $=51+3,4$

$84+5$

$=51+\cancel{0,9912}$ $\quad$ $0,1416$

$t(1-t)$

$$\begin{array}{r} 0,1416 \\ \times\ 17 \\ \hline 9912 \\ 1416\ \\ \hline 2,4072 \end{array}$$

$-9 \quad 0 \quad 9$

$(t-1)(t^2-2t)$

$$at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=0$$

$$2a^2(t-t^2)+a(t^3+2-2t-t^2)+t^2-t$$

$$2a^2(t-t^2)+a(t^2-2)(t-1)+t(t-1)=0$$

~~$D=(t-1)^2(t^2-2)^2+8(t-1)^2\cdot t^2=(t-1)^2($~~

t^4 ~~$+4t^2+4-8t^2$~~

$$D=(t-1)^2(t^2-2)^2-8t^2(t-1)^2(1-t)=$$

$$=(t-1)^2(t^2+2)^2 \qquad a_{1,2}=\frac{2t^2(1-t)}{4t(1-t)}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{-4(1-t)}{4t(1-t)}=\frac{-1}{t}$$

15

$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$ Церковны

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = \sqrt[6]{4}$

23 19
46 38
69 57
92 $\cancel{7}$6
95

1,9 2 3 8 ?   (18 12 16 15)

1 9 5 7 6 9 2 3 8   (14 13 12)

$\underbrace{1\,9\,5\,7\,6}\,\underbrace{9\,5\,7\,6}\,9$

$a_{2018} = 2 \Rightarrow$ С a_{2015} - правил

$2020 : 4 = 505$

$504 \cdot 4 = 2016$ 2018

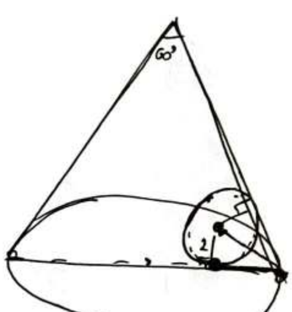
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^{\cancel{7}}}}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}$

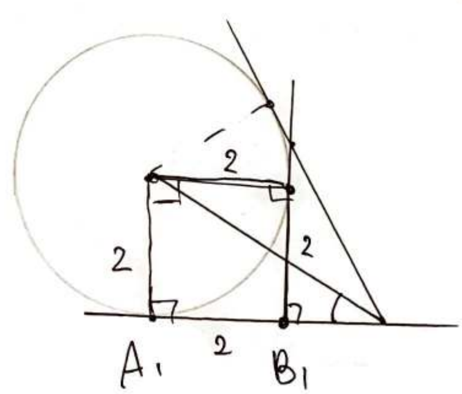
$\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}$

$1-f(f(x))^7 = 1-\frac{x^7-1}{x^7} = \cancel{\frac{x^7+1}{x^7}} = \cancel{\frac{2-x^7}{x^7}} =$

$= \frac{x^7-x^7+1}{x^7}$



$\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$



2n+1

16

Черновик

$a_1 = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$ $\quad a_1 a_2 = -\frac{1}{2} =$

$a_2 = -\frac{2}{2t} = -\frac{1}{t}$ $\quad a_1 + a_2 = \frac{t^2-2}{2t}$

$\frac{t^2-2}{2t} = \frac{(t^2-2)\cancel{(t-1)}}{2t\cancel{(1-t)}}$

$2t(1-t)(a-a_1)(a-a_2)$ $\quad 2t(1-t)$

$(2(1-t)a - t(1-t))(ta-1)$

$2(1-t)t - t^2(1-t) = (1-t)(2t-t^2)$

$a_1 + a_2 = \frac{t^2-2}{2t} = -\frac{(t^2-2)(t-1)}{2t(1-t)}$

$2t(1-t)(a-\frac{t}{2})(a+\frac{1}{t}) =$

$= (2a(1-t) - t(1-t))(ta+1)$

$-t(1-t)\cdot t + 2(1-t)\cdot t =$

$= (1-t)(-t^2+2t) = (1-t)t(2-t)$

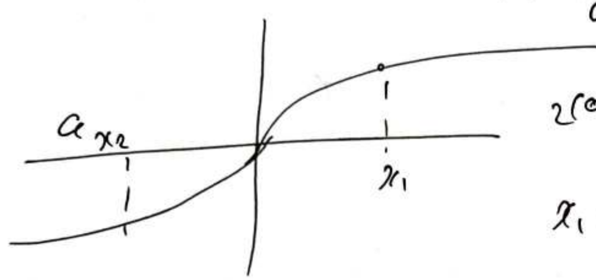
$2(1-t) \cancel{+} t^2(1-t) =$

$2(1-t)\cdot 1 - t^2(1-t) = (1-t)(2-t^2)$

Черновик

$$\frac{\underbrace{\operatorname{arctg}(\alpha) - \operatorname{arctg}(\beta)}}{\alpha - \beta}$$

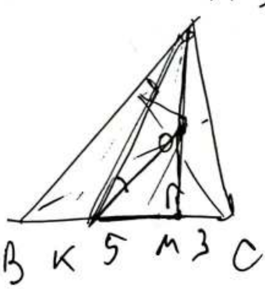
$$tg(\alpha - \beta) = \frac{x - y}{1 + xy}$$



$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$x_1 - x_2 = \cancel{\theta}\, d > 0$

$$\operatorname{arctg}(x_1) - \operatorname{arctg}(x_2) \geq 2\sqrt{2}$$



$$\frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2} \geq 2\sqrt{2} \overset{?}{\Rightarrow} x_1 - x_2 \geq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin d}{\cos x_2 \cos(x_2 + d)} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\sin d \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x_2 \cos(x_2 + d) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x_2 + \frac{d}{2}\right) + \cos\left(\frac{d}{2}\right)\right)$$

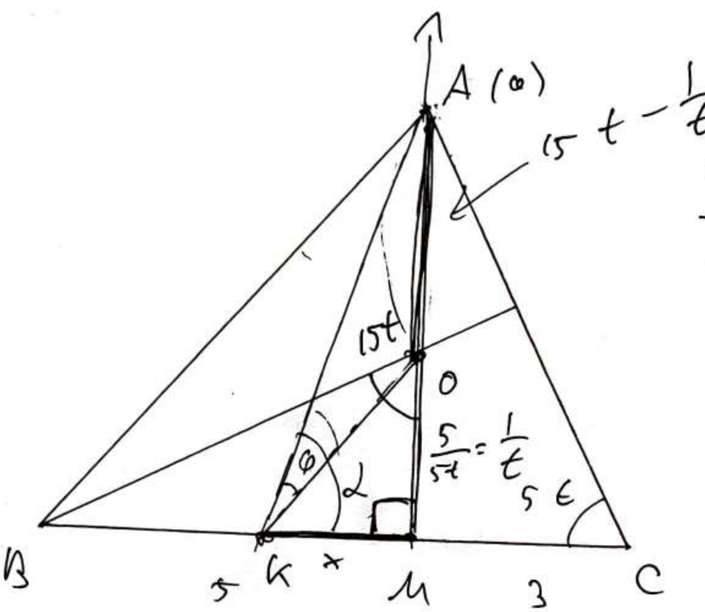
$$\geq x$$

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x} \leq 4 \qquad x \geq 4$$

$\boxed{13}$

Черновик



$$\frac{BM}{MC} = \frac{2R\sin\gamma\cos\beta}{2R\sin\beta\cos\gamma} = $$

$$= \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{5\cancel{t}}{3t}$$

$\cancel{\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}}$ $\quad \operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\alpha -$