МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Табаченков Андрей Михайлович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	15

Чистовик №1

№1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right) = 1 - \frac{1}{45^2} < 1$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= 1 > A$$

Ответ: B

№ 2.

~~Заметим~~ Заметим, что на 19 делятся 19, 38, 57, 76 и 95
на 23 делятся 23, 46, 69 и 92
(среди двузнач. чисел!)

Тогда вторая цифра числа — 6, а третья — 9.

Докажем, что после цифры 9 следующие 4 цифры — это всегда 5, 7, 6, 9 (в указанном порядке).

Если после 9 стоит 2, то следом за ней стоит 3, а за тройкой — 8. Но нет двузначного числа, делящегося на 19 или 23 и начинающегося с 8.

Тогда справа от 9 стоит 5, справа от 5 стоит 7, следом за 7 стоит 6, а следом за 6 стоит 9

(ч.т.д.)

Но тогда наше число будет иметь вид

$$46\underbrace{\underline{9576}\,\underline{9576}\ldots\underline{9576}}_{505 \text{ раз по 4 цифры } 9576}$$

Ответ: 6

№ 3.

Чистовик №2

Пусть $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(x)\ldots)))}_{n \text{ раз}}$

Заметим, что $f^{(2)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{1-\frac{1}{x^5}}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-(1-\frac{1}{x^5})}} = x$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} = f(x)$$

и так далее

то есть при $n \equiv 1 \pmod 3$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

при $n \equiv 2 \pmod 3$: $f^{(n)}(x) = \sqrt[5]{1-\frac{1}{x^5}}$

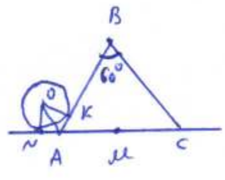
при $n \vdots 3$: $f^{(n)}(x) = x$

Тогда $f^{(1303)}(2022) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

№ 4.

I) Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через центр какого-то шара O



$\angle B = 60°$, $AB = BC$, тогда $\triangle ABC$ - р-с

значит, $\angle NAK = 120°$

(K и N ~~N и K~~ точки касания шара с бок. поверхностью и плоскостью основания)

Тогда т.к. $\triangle ONA = \triangle OKA$ (по гип. и катету),

$\angle OAN = \angle OAK = 60°$

Тогда $AN = ON \operatorname{ctg} \angle OAN = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Пусть M - центр основания конуса. Тогда $MN = MA + AN =$

$= R + \sqrt{3}$

(пусть R - искомый радиус)

II) Рассмотрим плоскость основания. Пусть O_1 и O_2 - точки касания двух соседних шаров с плоскостью основания конуса (в пункте I это, например, ~~это~~ точка N)

Пусть A_1 и A_2 - точки пересечения MO_1 и MO_2 с окружностью основания конуса

(в пункте I это, например, точка A)

Тогда по пункту I: $MO_1 = MO_2 = R + \sqrt{3}$

Черновик №3

Пусть C_1 и C_2 - центры этих шаров, L - точка их касания

тогда $C_1C_2O_2O_1$ - прямоугольник, причём L - середина C_1C_2

($C_1O_1 \parallel C_2O_2$; $C_1O_1 = C_2O_2 = 3$; C_1O_1 и C_2O_2 перпендикулярны плоскости основания конуса)

Тогда $O_1O_2 = C_1C_2 = C_1L + LC_2 = 6$

Получаем треугольник MO_1O_2, где $O_1O_2 = 6$; $MO_1 = MO_2 = R + \sqrt{3}$.

Аналогичное будет верно для любых двух других точек касания двух соседних шаров с плоскостью основания конуса.

Тогда эти точки касания образуют правильный 11-угольник со стороной 6, вписанный в окружность с центром M и радиусом $R+\sqrt{3}$.

(тогда ~~$\angle MO_1O_2$~~ $\angle O_1MO_2 = \frac{2\pi}{11}$)

значит, $O_1O_2 = 2(R+\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{11}$ (по теореме синусов)

$$\boxed{R = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$.

№5.

Заметим, что $a > 0$ тогда и только тогда, когда $t \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$.

$b > 0 \iff t > 4$

$c > 0 \iff t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что если хотя бы 2 из чисел a, b, c положительны, то среднее из них точно положительно

Если хотя бы 2 из чисел a, b, c <u>неположительны</u>,

но среднее из них могло
неположительно

(неположительно - меньше либо равно 0).

чистовик
№ 4

При $\boxed{t>10}$: $a>0$, $b>0$ (подходит)
При $t \le -10$: $b<0$; $a \le 0$ (не подходит)

I) Пусть тогда $t \in (4; 10]$.

Тогда $b>0$, $a \le 0$.

тогда $c>0$.

Тогда $t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Но при $k \le 0$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<4$

При $k \ge 2$, $\frac{\pi}{6}+2\pi k>10$

При $k=1$, $4<\frac{13\pi}{6}<\frac{17\pi}{6}<10$

тогда $\boxed{t \in \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)}$

II) Пусть $t \in [0; 4]$.

Тогда $a \le 0$, $b \le 0$ (не подходит)

III) Пусть $t \in (-10; 0)$: $b<0$, $a>0$.

тогда $c>0$
$t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$t<0$, поэтому $k<0$

При $k=-1$: $-10<-\frac{11\pi}{6}<-\frac{7\pi}{6}<0$

~~при k = -2: ...~~

При $k=-2$: $-\frac{23\pi}{6}<-10<-\frac{19\pi}{6}$

При $k \le -3$: $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<-10$

Тогда $\boxed{t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)}$

Ответ: $t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$

Чистовик №5

№ 6.

~~(tg x − 1)(tg x − a)(at + 2) = 0~~

$(tg\,x-1)(tg\,x-a)(a\,tg\,x+2)=0$ (*) (относительно x)

Пусть $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – множество корней уравнения

$(t-1)(t-a)(at+2)=0$ (**) (относительно t)

$x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, поэтому множество корней уравнения (*) – $\{arctg\,t_1, arctg\,t_2, \dots, arctg\,t_n\}$. при $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

I) При $a=0$:

$(tg\,x-1)\,tg\,x=0$

тогда $\{1;0\}$ – мн-во корней уравнения (**),

а значит $\{\frac{\pi}{4};0\}$ – мн-во корней (*) при $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

тогда наибольшее расстояние между корнями $\boxed{|\frac{\pi}{4}-0|=\frac{\pi}{4}}$

II) ~~a > 0:~~

$a\neq0$:

$(tg\,x-1)(tg\,x-a)(a\,tg\,x+2)=0$

тогда $\{1;a;-\frac{2}{a}\}$ – мн-во корней уравнения (**)

значит, $\{\frac{\pi}{4}; arctg\,a; arctg(-\frac{2}{a})\}$ – мн-во корней уравнения (*) при $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

Если $a\neq0$, то какое-то из чисел a и $(-\frac{2}{a})$ отрицательно.

тогда какое-то из чисел $arctg\,a$; $arctg(-\frac{2}{a})$ тоже отрицательно (пусть это число b)

$\boxed{\text{но тогда } |\frac{\pi}{4}-b|>\frac{\pi}{4}}$

Ответ: $a=0$; $\frac{\pi}{4}$ – наим. знач.

№ 7. чистовик № 6

Введём систему координат с центром $A(0;0)$ и осями $Ox - \overrightarrow{AC}$, $Oy - \overrightarrow{DB}$

Тогда $D(2;0)$

$C(5;0)$

Пусть $H(2;x)$, $B(2;y)$

(Заметим, что $y>x$, так как $\triangle ABC$ - о/у).

$\overrightarrow{AB}\{2;y\}$

$\overrightarrow{CH}\{-3;x\}$

$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ (H - точка пересечения высот)

тогда $0 = 2\cdot(-3)+y\cdot x$

$xy = 6$

тогда $R = x^2+y^2 = (x-y)^2+2xy = (x-y)^2+12>12$ (т.к. $y>x$).

Пусть $K(z;0)$

тогда $z \in [0;5]$

Пусть $t = |z-2|$ (тогда $|DK| = t$, $t \in [0;3]$)

Пусть $v = t^2$, тогда $v \in [0;9]$.

Заметим, что $|BK| = \sqrt{(z-2)^2+y^2} = \sqrt{v+y^2}$.

$|KH| = \sqrt{(z-2)^2+x^2} = \sqrt{v+x^2}$.

$|BH| = |y-x| = y-x$

Тогда по теореме косинусов:

$$\cos\angle BKH = \frac{2v+x^2+y^2-x^2-y^2+2xy}{2\sqrt{v^2+vR+36}} = \frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}}$$

~~$v \geq 0$,~~

если $v=0$, то D и K совпадают и ~~$\angle BKH = 0$~~ $\angle BKH$ не максимален (точки B, K, H на 1 прямой)

Тогда $v>0$. Но если $v>0$, $R>12$, то $\cos\angle BKH \in (0;1)$

тогда $\angle BKH$ максимален, тогда и только тогда, когда $f(v) = \frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}}$ минимально (при $v \in (0;9]$)

Чистовик
№7

~~Пусть~~

$$f'(v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+vR+36}} - \frac{(v+6)(2v+R)}{2\sqrt{v^2+vR+36}^{\,3}} = \frac{2v^2+2vR+72-2v^2-vR-12v-6R}{2(v^2+vR+36)\sqrt{v^2+vR+36}} =$$

$$= \frac{(v-6)(R-12)}{2(v^2+vR+36)\sqrt{v^2+vR+36}}$$

$R > 12$, $v > 0$.

Поэтому $f'(v) = 0$ при $v = 6$

при $v < 6$ $f'(v) < 0$

при $v > 6$ $f'(v) > 0$

(то есть $v = 6$ — точка минимума при $v \in (0; 9]$)

Тогда $f(v)$ минимально тогда и только тогда, когда $v = 6$.

Получаем, что $|DK| = t = \sqrt{v} = \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Черновик

~~$tg x = a$~~

$tg x = 1$:

$\cancel{a} + \cancel{2} - \cancel{k} - \cancel{2}^2 + k^2 - 2a - k + 2k = 0.$

$$at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a \,\Big|\, \frac{t-1}{at^2 + (2-a^2)t - 2a}$$

$$-at^3 - at^2$$

$$(2-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a$$

$$-(2-a^2)t^2 - (2-a^2)t$$

$$(-2at) + 2a$$

$$\frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}} \geq \frac{6+\sqrt6}{\sqrt{42+R\sqrt6}}$$

$$\frac{v^2+12v+36}{v^2+vR+36} \geq \frac{42+12\sqrt6}{42+R\sqrt6}$$

$(12v-42) + v^2R\sqrt6 + 36R\sqrt6 \geq 42v^2 + 42vR + 42\cdot 36 + 12\sqrt6 v^2 + 12\sqrt6 vR + 12\sqrt6\cdot 36$

$12v^2 + 144v + 36\cdot 12 + v^2R + 12vR + 36R \geq 24v^2 + 24vR + 24\cdot 36$

$(t-1)(at^2 + (2-a^2)t - 2a)$

$t = a.$

$v^2(R-12) + 12v(12-R) + 36(R-12) \geq 0$

$v^2 - 12v + 36 \geq 0$

$(v-6)^2 \geq 0$

$at(t-a) + 2(t-a)$

$$\cos\angle BKK \geq \frac{12}{\sqrt{72+6R}}$$

$v^2(R\sqrt6 - 12\sqrt6)v + v(12\cdot 42 - 42R) + 36\sqrt6(R-12) \geq 0.$

$(t-1)(t-a)(at+2)$

$x = arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ $a \neq 0.$

$x = arctg\, a$

$x = arctg(-\frac{2}{a})$

$\sqrt6$

$v^2\sqrt6 - 12v + 36\sqrt6 \geq 0$

$v^2 - 2\sqrt6 v + 36 \geq 0$

$a<0$: $\frac{\pi}{4}; 0$ $\frac{\pi}{4}$

$vR - 12v + (12-R)6 =$

$= (v-6)(R-12)$

$$\frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}}$$

$$\frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}} \geq \frac{12}{\sqrt{72+6R}}$$

при $a \neq 0$:

$-\frac{2}{a} < 0$

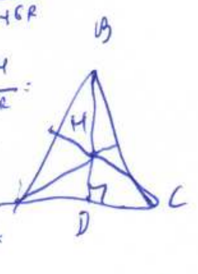
$a=0$.

$x^2+y^2 = R$

$$= \sqrt{\frac{v^2+12v+36}{v^2+vR+36}}$$

$$\frac{v^2+12v+36}{v^2+vR+36} \geq \frac{144}{72+6R} = \frac{24}{12+R}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{12v - vR}{v^2+vR+36}}$$



$AD = 2$ $t \in [0;3]$

$DC = 3$

$12(v^2 + v(x^2+y^2) + 36) - 2v^2 - v^2(x^2+y^2) - 12v - 6v(x^2+y^2) =$

$= v^2(10 - x^2 - y^2) + v(6x^2 + 6y^2 - 12)$

$$\frac{1}{\sqrt{v^2+vR+36}} - \frac{(v+6)(2v+R)}{2(\ldots)\sqrt{\ldots}} =$$

$$= \frac{2v^2 + 2vR + 72 - 2v^2 - vR - 12v - 6R}{2(\ldots)\sqrt{\ldots}} =$$

$$= \frac{v(R-12) + 6(12-R)}{2(\ldots)\sqrt{\ldots}} =$$

$$= \frac{(v-6)(R-12)}{2(\ldots)\sqrt{\ldots}}$$

$A(0;0)$ $B(2;y)$

$D(2;0)$ $H(2;x)$

$C(5;0)$ $CH \perp AB$ $\vec{CH}\{-3;x\}$

$\vec{AB}\{2;y\}$

$0 = -6 + xy$

$xy = 6$

пусть $t = z - 2$

$v = (t-2)^2 \in [0;9]$

$K(z;0)$

$\vec{BK}\{z-2;-y\}$ $\vec{BH}\{0; x-y\}$

$\vec{KH}\{2-z; x\}$

$$\frac{v+6}{\sqrt{v^2+vR+36}}$$

$-\frac{1}{2}$

$x^2+y^2 = 12$

$x^2+y^2-2xy = 0.$

$x = y$ (противор.)

$x^2+y^2 > 12.$

$$\cos\angle BKH = \frac{(z-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 + x^2 - x^2 - y^2 + 2xy}{2\cdot BK\cdot KH}$$

при $z=1$:

~~$\cos\angle BKH = 6$~~

$$= \frac{(z-2)^2+6}{BK\cdot KH} = \frac{t^2+6}{\sqrt{(t^2+y^2)(t^2+x^2)}} = \frac{t^2+6}{\sqrt{t^4+t^2(x^2+y^2)+36}}$$

$v = 6$

$- \; + $

$\nearrow 6 \nearrow$

пусть $t^2 = v$

$$f(v) = \frac{v+6}{\sqrt{v^2+v(x^2+y^2)+36}}$$

$$f'(v) = \frac{6}{\sqrt{\ldots}} - \frac{(v+6)(2v+v(x^2+y^2))}{2\sqrt{\ldots}(\ldots)} = \frac{}{2\sqrt{\ldots}(\ldots)}$$

т.е. $\cos\angle BKH$ мин. при $v=6$

черновик

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{45^2}$

$\frac{3}{19} > 0,15$

$10 > 19$

$\frac{60}{19} > \pi$

$3\frac{3}{19} >$

$4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$

$3\sqrt{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 3\sqrt{2}$

$\frac{60}{17} > \pi$

$3\frac{9}{17} > 3,5$

23 46 69 92

19 38 57 76 95

4 6 9 2 3 8 5 7 6 9

46 9576 ... 9576

$2^t - 16 \sim \sin t - \frac{1}{2}$

$t(t^2-10)$ $\quad 2^t - 16 \sim \sin t - \frac{1}{2}$

$\sin t \in [-1,5; \frac{1}{2}]$

$2 + \frac{2020}{4} = 505$

$2 + 505 \cdot 4$

$2^t - 16 \geq \frac{1}{2}$

10

4

$\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{-31}}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{-31}}} =$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - \frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1-x^5}{-x^5}} = \sqrt[5]{1 - \frac{1}{x^5}}$

$-\frac{19\pi}{6} < -10$

$19\pi > 60$

$\pi > \frac{60}{19}$

$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-32}{-31}}} = \frac{\sqrt[5]{31}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{31}{32}}} = 2$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - 1 + \frac{1}{x^5}}} = x$ $\quad t \geq \log_2$

$t^3 - 100t \geq 0$

$t(t-10)(t+10) \geq 0$

$-10 \quad 0 \quad 10$

$\text{①}: t \in [-10; 0] \cup [10; +\infty)$

$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$\frac{30}{-19} \Big| \frac{19}{0,15}$ $\quad 110$

т. е. при $(n-1) \vdots 3$

$f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$2^t - 16$: когда $t \geq 4$

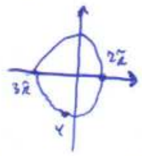
$\sin t - \frac{1}{2} \geq 0$: $t \in [\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k]$.

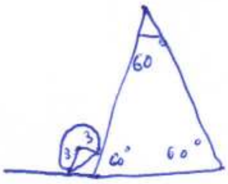
$\frac{1}{\sqrt[5]{1-22x^5}}$.

$(n-2) \vdots 3$:

$t \geq 10$.

$f^{(n)}(x) = \sqrt[5]{1 - \frac{1}{x^5}}$ $\quad t \in [4; 10]$:





$n \vdots 3$

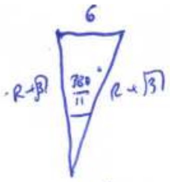
$f^{(n)}(x) = x$.

$\frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11}$

$4 \sim 1,5\pi$

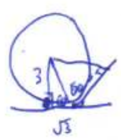
$t \in [\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}]$

$t \in -10$: нет!



$\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{22} = \frac{\pi}{11}$

$t \in [0; 4]$. (нет)



$tg 60° = \frac{3}{x}$

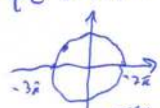
$x = \sqrt{3}$

$90° - \frac{180°}{11} = \frac{990° - 180°}{11}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11} = \frac{9\pi}{22}$

$t \in (-10; 0)$:

$3\pi \sim 10$



$3,33 > 3,14$

$-10 < -3\pi$

$-4\pi + \frac{5\pi}{6} <$

$-\frac{19\pi}{6} < -10$

$19\pi > 60$

$\pi > 3\frac{3}{19}$

$19\pi < 60$

$[-10; -\frac{19\pi}{6}] \cup [-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}]$

$6 = 2(R+\sqrt{3}) \cos \frac{9\pi}{22}$

$3 = (R+\sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{11}$

$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3} = R$

$t \in (-10; -\frac{19\pi}{6}) \cup (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup$

$\cup (10; +\infty)$