МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Талалаев Сергей Алексеевич**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

Задача 1 Чистовик

Заметим, что нам важно лишь то, какая грань кубика скрыта, а как он повёрнут относительно стола, нам не важно. Поэтому событием будем называть то, ~~какая~~ что нек-ая грань оказалась скрыта. Т.к. различных граней 6, и на каждой написано отличное от других число, то всего ~~событий~~ исходов 6.

Заметим, что среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 ровно 3 числа дел-ся на 2, ровно 1 число дел-ся на 4. Т.к. нечётные числа не влияют на делимость числа на нек-ую степень двойки, то делимость на 16 определяется исключительно наличием/отсутствием чётных чисел (2, 4, 6). Также можно заметить, что $2 \vdots 2^1$, $6 \vdots 2^1$, $4 \vdots 2^2$ (но $2 \not\vdots 2^2$, $6 \not\vdots 2^2$, $4 \not\vdots 2^3$). Тогда произведение всех чисел делится на $2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 2^4 = 16$, но не делится на $2^5 = 32$ (т.к. в разложение пр-ия всех чисел на простые мн-ли входят 4 двойки). Поэтому, чтобы пр-ие всех чисел на видимых гранях делилось на 16, необходимо, чтобы все чётные числа были видны, иначе видно ≤ 2 числа, ~~откуда~~ их пр-ие делится не более чем на 8 ($2 \cdot 4 \vdots 2^3$, $2 \cdot 4 \not\vdots 2^4$; $6 \cdot 4 \not\vdots 2^4$, $6 \cdot 4 \vdots 2^3$; $2 \cdot 6 \vdots 2^2$, $2 \cdot 6 \not\vdots 2^3$) $\Rightarrow$ пр-ие всех чисел на видимых гранях делится не более чем на 8, что не удовл. усл. Отсюда все числа чётные видны, и скрыто одно из 3 неч. чисел — 1, 3 или 5. Таким образом, ~~событий~~ исходов, удовл. условию, не более 3. Т.к. все 3 ~~события~~ исхода возможны, то их ровно 3.

~~Докажем, что все 3 события возможны. Т.к. кубик игральный, то он подчиняется старому правилу: Σ чисел на противопол. гранях равна 7.~~

Вероятность ~~собы~~ того, что ~~события~~ исход события удовлетворяет условию, равно отнош. кол-ва исходов, удовл. усл., к общему кол-ву исходов. В данном случае оно равно $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, или 50%, или 0,5.

Ответ: 0,5 (50%).

Задача 2 Чистовик.

Рассмотрим арифметические прогрессии $\{a_n\} = 1, 3, 5, \dots$ и $\{b_n\} = 1, 4, 7, \dots$. Разность первой прогрессии a_n равна $d_a = 3-1=2$. Разность второй прогрессии b_n равна $d_b = 4-1=3$. Тогда прогрессии можно задать так: $\{a_n\}$: $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + (n-1)d_a = 1 + 2\cdot(n-1) = 2n-1 = 2(n-1)+1$; $\{b_n\}$: $b_1 = 1$, $b_n = b_1 + (n-1)d_b = 3(n-1)+1$.

~~Т.о.~~ Т.к. $a_1 = 1 = 2\cdot(1-1)+1$, $b_1 = 1 = 3\cdot(1-1)+1$, то данные формулы работают для всех членов арифмет. прогрессий.

~~Т.к. $\{a_n\}$: $a_n = 2(n-1)+1$; $\{b_n\}$: $b_n = 3(n-1)+1$, то числа, к-ые не являются членами этих арифметических прогрессий, могут быть представлены в виде $2k$ или $3k$ или $3k+2$~~

Пусть число A не явл. членом посл-ти $\{a_n\}$: $a_n = 2(n-1)+1$. Т.к. $A = 2k + r$, $0 \le r < 2$, то $r \in \{0; 1\}$, но значение $r=1$ нас не удовл. $\Rightarrow A = 2k+0 = 2k$.

Пусть число A не явл. членом посл-ти $\{b_n\}$: $b_n = 3(n-1)+1$. Т.к. $A = 3k' + r'$, $0 \le r' < 3$, то $r' \in \{0; 1; 2\}$, но знач. $r' = 1$ нас не удовл. $\Rightarrow A = 3k'+0 = 3k'$ или $A = 3k'+2$.

Т.к. число A не явл. членом ни одной из этих посл-тей, то $A = 2k$, $A = 3k'$ или $A = 3k'+2$ (т.е. A – чётное и либо делится на 3 без ост-ка, либо делится на 3 с ост-ком 2).

~~Рассмотрим~~ Пусть $A = 6m + q$, $0 \le q < 6 \Rightarrow q \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Если $q \in \{1; 3; 5\}$, то $A = \underset{\vdots 2}{6m} + \underset{\not\vdots 2}{q} \not\vdots\, 2$, что не удовл. нашему выводу $\Rightarrow$ $\Rightarrow q \in \{0; 2; 4\}$. Если $q = 0$, то $A = \underset{\vdots 3}{6m} = 3\cdot(2m) = 3k'$, что удовл. усл. Если $q = 2$, то $A = \underset{\vdots 3}{6m} + 2 = 3\cdot(2m)+2 = 3k'+2$, что удовл. усл. Если $q = 4$, то $A = 6m+4 = 3\cdot(2m+1)+1 = 3k'+1$ – не удовл. усл. Т.о., среди каждых 6 натуральных чисел ровно 2 удовл. условию (случай $A = 6m$ можно рассм-ть как $A = 6(m-1)+6$).

Т.к. всего натуральных чисел, ≤ 2022, всего 2022, а $2022 \vdots 6$, то ~~нужно~~ можно разбить все числа на $2022 : 6 = 337$ непересек-ся шестёрок подряд идущих чисел, в каждой по 2 числа, удовл. усл. $\Rightarrow$ всего таких чисел $2022 : 6 \cdot 2 = 2022 : 3 = 674$.

Ответ: 674

Задача 3 Чистовик

Чтобы найти 3 посл. цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$, дост-но знать 3 посл. цифры числа 9^{2022}, т.к. число $10^{2022} \vdots 10^3 = 1000$.

Заметим, что если $9^n = 1000a + c$, $9^m = 1000b + d$, то $9^{n+m} = 9^n \cdot 9^m =$ $= (1000a + c)(1000b + d) = 1000 \cdot 1000ab + 1000 \cdot (ad + bc) + cd = 1000k + cd$. Таким образом, чтобы знать посл-ие 3 цифры числа 9^{n+m}, дост-но знать последние 3 цифры пр-ия посл. 3 цифр числа 9^n и последних 3 цифр числа 9^m.

$9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^4 = (9^2)^2 \overset{1000}{\equiv} 81^2 = 6561 \overset{1000}{\equiv} 561$, $9^5 = 9^4 \cdot 9^1 \overset{1000}{\equiv} 561 \cdot 9 = 5049 \overset{1000}{\equiv} 49$,
$9^{10} = (9^5)^2 \overset{1000}{\equiv} 49^2 = 2401 \overset{100}{\equiv} 401$, $9^{20} = (9^{10})^2 \equiv 401^2 \equiv 801$, $9^{40} = (9^{20})^2 \equiv 801^2 \equiv 601$,
$9^{50} = 9^{40} \cdot 9^{10} \equiv 401 \cdot 601 \equiv 1$, т.о. $9^{50} \overset{1000}{\equiv} 1$.

$9^{2022} = 9^{2000} \cdot 9^{22} = (9^{50})^{40} \cdot 9^{20} \cdot 9^2 \equiv 1^{40} \cdot 801 \cdot 81 \equiv 881$

$10^{2022} - 9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 1000 - 881 = 119$

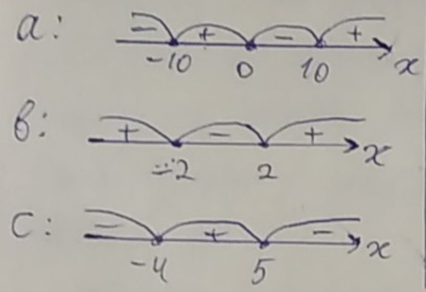
Ответ: 119.

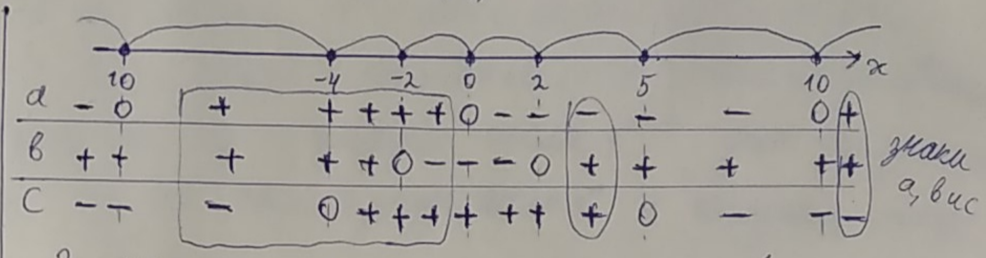
Задача 5 Чистовик

$a = x^3 - 100x = x(x^2 - 100) = x(x-10)(x+10)$

$b = x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)\overbrace{(x^2+4)}^{>0}$

$c = x + 20 - x^2 = -(x^2 - x - 20) = -(x-5)(x+4)$





Заметим, что если есть комбинация + + +, + + 0, + + −, то они удовл. усл. Все другие комбинации нас не удовл. (так, + 0 0 − среднее число = 0, + 0 − − ср. число = 0, + − − − ср. число ≤ 0, 0 − − − ср. число < 0). Все удовл. нас комбинации обведены.

Т.о., нас удовл. $x \in (-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$

Ответ: $x \in (-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$.

Черновик

$864t'^{2}$

$\times\frac{25}{306}$ $\times\frac{306}{50}$ $\times\frac{153}{50}$ 7650

$\times\frac{15}{50}$ 750

$\frac{x}{50}+\frac{\sqrt{9^2+(15-x)^2}}{40}\to\min$

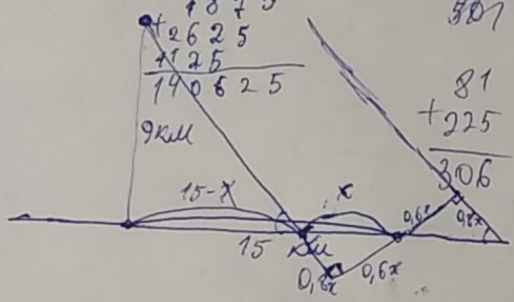
$\frac{x}{50}=\frac{x}{40}$

$\times\frac{375}{375}$ 1875 2625 1125 140625

$\frac{4x}{200}+\frac{5\sqrt{306-30x+x^2}}{200}$

$32t'-15$

$1024t'^2-480t+225=160t'^2-160\cdot 60x+160\cdot 2871$



$81+225=306$

$4x+5\sqrt{306-30x+x^2}=t$

$\cancel{16x^2+40x\sqrt{306-30x+x^2}=25(306-30x)}$

$t-4x=5\sqrt{306-30x+x^2}$

$16x^2-8xt+t^2=25(306-30x+x^2)$

$16x^2-8xt+t^2=7650-750x+25x^2$ $\quad x=15-32\cdot 30+40\cdot 3$

$9x^2-x\cdot(750-8t)+7650-t^2=0$

$\frac{D}{4}=(375-4t)^2-(7650-t^2)\cdot 9=\underbrace{375^2}_{25^2\cdot 15^2}-9\cdot 25\cdot 306-8\cdot\underbrace{375}_{25\cdot 15}t+16t^2+9t^2=$

$=25(t^2-15\cdot 8t-9\cdot 306+\underbrace{15^2\cdot 25}_{25^2\cdot 9=625\cdot 9})=25(t^2-120t+319\cdot 9)$

$625-306=319$

$\times\frac{320}{9}$ $320-32=2880$ $2880-9=2871$ $\times\frac{319}{9}$ 2871

$x=\frac{375-4t\pm 5\sqrt{t^2-120t+\cancel{319\cdot 9}\,2871}}{9}=\frac{75}{3}-\frac{4t}{9}\pm\frac{5}{9}\sqrt{t^2-120t+2871}$

$t=200t'$

$t^2-120t+2871=0$

$3600-2871=729$

$t^2-2t\cdot 60+3600-729=0$

$(t-60)^2-27^2=0$

$(t-60-27)(t-60+27)=0$

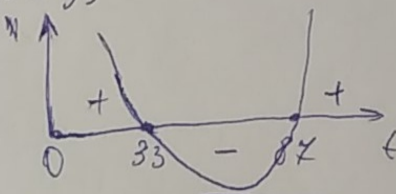
$(t-87)(t-33)=0$

$t=87,\ t=33$

$x(t)=\frac{75}{3}-\frac{4t'}{9\cdot 50}\pm\frac{5}{9\cdot 40}\sqrt{(t'-87)(t'-33)}$

$x(33)=$

$\cancel{x(t')=75-\frac{t'}{450}\pm\frac{1}{360}\sqrt{(t'-87)(t'-33)}}$



$x(t')=\frac{375-800t'}{9}\pm\frac{1000}{9}\sqrt{(t'-87)(t'-33)}$

$2022 : 6 = 337$

$\frac{x}{50}+\frac{\sqrt{9^2+(15+x)^2}}{40}=t$

125 $300 : 25$

$\frac{25}{9}\cdot(15-32t'+40\sqrt{(t'-87)\cdot(t'-33)})$

$5\sqrt{306+30x+x^2}=t-4x$

$9x^2+x(750+8t)+7650-t^2=0$

$\frac{D}{4}=$

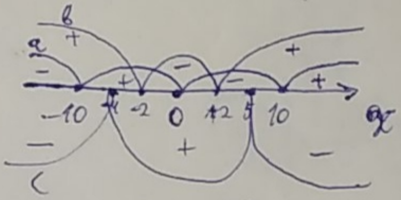
$x(t')=-\frac{75}{3}-\frac{800t'}{9}\pm\frac{1000}{9}\sqrt{(t'+87)(t'+33)}$

Черновик

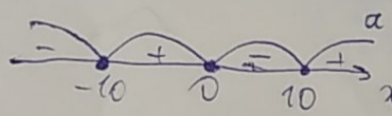
$a = x^3 - 100x = x(x-10)(x+10)$

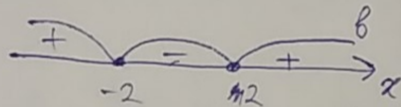
$b = x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

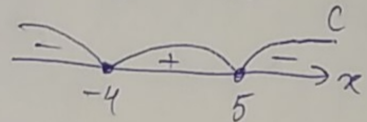
$c = x + 20 - x^2 = -(x^2 - x - 20) = -(x-5)(x+4)$

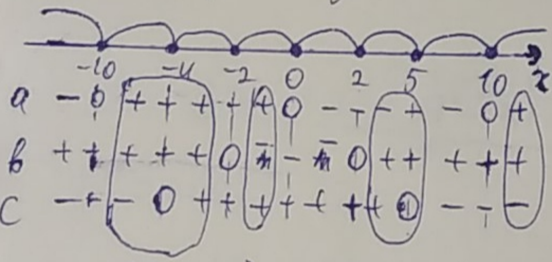


$x \in (-10; 0] \cup ($









$x \in (-10; -2) \cup (-2; 0) \cup (2; 5] \cup (10; +\infty)$

$(-\infty; -10]$: $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$

$(-10; -4]$: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ (V)

$(-4; -2]$: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ (V)

$(-2; 0]$: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ (V)

$[0; 2]$: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$

$[2; 5]$: $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ (V)

$[5; 10]$: $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$

$(10; +\infty)$: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ (V)

$201 \cdot 401 = 601$; $601 \cdot 401 = \ldots 001$; $401 \cdot 401 = 160801$; $801 \cdot 401$

9, 81, 729, 561, 049, 441, 969, 721, 489, 401, 609, 481, 329, 961, 649, 841, 569, 121, 089, 801, 209, 881, 029, 889, 001

$81 \cdot 9 = 729$; $729 \cdot 9 = 561$; $441 \cdot 9 = 969$; $969 \cdot 9 = 721$; $561 \cdot 9 = 049$; $049 \cdot 9 = 441$; $721 \cdot 9 = 489$; $489 \cdot 9 = 401$; $329 \cdot 9 = 961$; $401 \cdot 9 = 609$; $609 \cdot 9 = 481$; $481 \cdot 9 = 329$; $961 \cdot 9 = 649$; $649 \cdot 9 = 841$; $841 \cdot 9 = 569$; $569 \cdot 9 = 121$; $121 \cdot 9 = 089$; $89 \cdot 9 = 801$; $321 \cdot 9 = 889$; $809 \cdot 9 = 281$; $801 \cdot 9 = 209$; $881 \cdot 9 = 029$; $209 \cdot 9 = 881$; $889 \cdot 9 = 001$; $41 \cdot 9 = 369$; $369 \cdot 9 = 3321$

$281 \cdot 9 = 529$; $529 \cdot 9 = 761$; $761 \cdot 9 = 849$; $849 \cdot 9 = 641$; $641 \cdot 641$; $450 \cdot 9 = 4050$; $200 - 4 = 196$

$-19 \cdot 9 = -171$; $29 \cdot 9 = 261 = -39$; $401 \cdot 401$; $89 \cdot 9 = 801$; $99 \cdot 9$; $729 \cdot 9 = 561$; $561 \cdot 9 = 049$; $49 \cdot 49 = 441 + 196 = 2401$

$200 - 171 = 29$; $801 \cdot 81 = \ldots 801$, 08

$-9, +19, +29, -39, 49, -59, 69, -79, 89, -99, 9 \ldots$

$9^{11} = 9^1 \Rightarrow 9^{10} \overset{10^2}{\equiv} 1$

$9^3 = 9^1$ $\quad 9^2 \overset{10^2}{\equiv} 1$

$9^{2500} = 1$

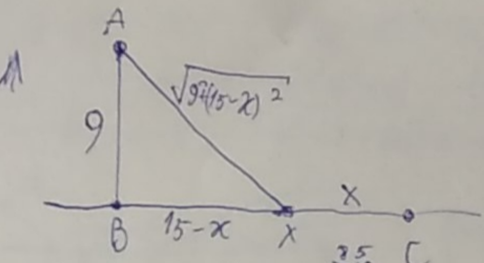
$-271 \cdot 9 = -2439$; $1000 - 43$; $49 \cdot 9 = 449$; $449 \cdot 9 = 4041$

$9^5 = 9^2 \cdot 9^3 = 81 \cdot 729$

9, 81, ~~-271~~ 729, ~~-439~~ 561, 049, 449, 041, 369, 321, 889, 1

$81 \cdot 81 = 6561$; $729 \cdot 81 = 59049$ 49; $1000 - 729 = 271$; $439 \cdot 9 = 3951$; $121 \cdot 9 = 1089 = 89$; $561 \cdot 9 = 5049$

$1000 - 879 = 121$



Черновик

$x>0$

$0,8x + \sqrt{x^2-30x+306} = 9^2+15^2=306$

$306-0,8x = \sqrt{x^2-30x+306}$

$306^2 - 306\cdot1,6x + 0,64x^2 = x^2-30x+306$

$0,36x^2 - x\cdot(30-306\cdot1,6) + 306\cdot305 = 0 \;|:0,6^2$

$x^2 - x\cdot\left(\frac{300}{6}\cdot\frac{10}{6} - \frac{3060}{6}\cdot\frac{10}{6}\cdot\frac{16}{10}\right) - 85\cdot305\cdot10 = 0.$

$x^2 - x\cdot\left(\frac{500}{6} - 85\cdot16\right) - 85\cdot3050 = 0$

$\frac{D}{4} = \left(\frac{125}{3} - 85\cdot8\right)^2 + 85\cdot305\cdot10 = \frac{125^2}{3^2} - \frac{125}{3^2}\cdot85\cdot8 + 85^2\cdot8^2 + 85\cdot305\cdot10\cdot\frac{3^2}{3^2}$

$5\cdot17 \quad 5^2\cdot17^2 \quad 5\cdot17\cdot5\cdot61\cdot2\cdot5$

$= \frac{5^2}{3^2}\left(5 - 5^2\cdot17\cdot3 + 17^2\cdot3^2 + 10\cdot61\cdot17\cdot3^2\right)$

$x_1 = \frac{125}{3} - \frac{85\cdot24}{3} \pm \frac{5}{3}\cdot\sqrt{5-25\cdot51+51^2+51\cdot10\cdot183}$

51×51: 51, 255, 2601

25×51: 25, 125, 1275

183×51: 183, 915, 93330

$17\cdot24$: 24×17: 168, 24, 408

303×303: 909, 909, 91809

490 − 408 = 82

82 + 25 = 107.

93330 + 1275 + 5 = 94610

94610 − 2601 = 92009

$\sqrt{306} = 0,8x+\sqrt{9}$

~~$0,64x^2 + x^2 - 30x + 306 = 306$~~

$306^2 - 306\cdot1,6x + 0,64x^2 = x^2-30x+306$

$3060^2 - 3060\cdot16x + 64x^2 = 100x^2 - 3000x + 30600$

$36x^2 - 6\cdot500x + 6\cdot510\cdot16x + 6^2\cdot85\cdot10 - 6^4\cdot85^2 = 0 \;|:6^2$

$x^2 - \frac{250}{3}x + 85\cdot16x + 850 - 510^2 = 0.$

$170\cdot8x$

$\frac{D}{4} = \left(170\cdot8 - \frac{250}{3}\right)^2 - 850 + 510^2 = 10^2\left(\left(17\cdot8-\frac{25}{3}\right)^2 - 17\cdot2 + 102^2\right)$

$x = \frac{\frac{250}{3} - 170\cdot8 + \frac{10}{3}\cdot490}{2} = \frac{5}{3}\cdot(25-17\cdot24+490)$

$= \frac{5\cdot107}{3} = \frac{535}{3} = 178\frac{1}{3}$

$17\cdot8 = 80+56 = 136.$

$\frac{625}{9} - 34 + 10404 =$

$= 10^2\cdot\left(28866 - \frac{6800}{3} + \frac{625}{9}\right) =$

$= \frac{10^2}{3^2}\cdot(259794 - 20400 + 625$

136×136: 816, 408, 136, 18496

$136\left(\frac{2\cdot25}{3}\right) = \frac{6800}{3}$

102×102: 204, 102, 10404

288660 − 28866 = 259794

259794 − 20400 = 239394

239394 + 625 = 240019

$6800\times3 = 20400$

18496 + 10404 = 28900

28900 − 34 = 28866

980 − 1 = 979.

493

49×49: 441, 196, 240100

$490^2 - 489^2 = 490 + 489$