МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Талменев Владимир Александрович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	5	15	0	15	15	15

№1 Чистовик

Для начала упростим выражение A:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}}=\sqrt[3]{\frac{(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=\sqrt[3]{1}=1$$

Теперь определим значение B:

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{77}{(38\cdot39)^2}+\frac{79}{(39\cdot40)^2}=\frac{1+2}{1^2\cdot2^2}+$$

$$\frac{2+3}{2^2\cdot3^2}+\dots+\frac{39+40}{39^2\cdot40^2}=\sum_{k=1}^{39}\frac{k+(k+1)}{k^2\cdot(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{39}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Докажем с помощью индукции, что для любого $n\in N$ верно $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, база: $n=1$: $\frac{2+1}{1^2\cdot2^2}=1-\frac{1}{(1+1)^2}$ — верно. Переход $n\to n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

воспользуемся предположением индукции для n

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-$$

$$\frac{n^2+4n+4-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$1-\frac{1}{(n+2)^2}$$ — ч.т.д. Тогда $B=\sum_{k=1}^{39}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=1-\frac{1}{(40)^2}$, по доказанному. Получаем, что $A=1>1-\frac{1}{(40)^2}=B$, а значит $A>B$

Ответ $A>B$.

(1)

№2 Черновик

Рассмотрим какие двузначные числа делятся на 19 или 23: 19, 38, 57, 76, 95 и 23, 46, 69, 92.
Тогда число начинается с 4, ~~в~~ но следом за ним может быть только 6.

4 → 6 → 9 ↗ 2 → 3 → 8 восемь может быть только в конце
↘ 5 → 6 → 9 (тут все циклы) ⇒ 2022 значит
число начинается с ~~46~~ 469 и дальше можно писать 569, 238, но 238 только в конце числа 2022:3
⇒ в конце будет или 9, либо 8 Ответ 8, 9

Чистовик №6

$$a\,ctg^3x + (2a^2-a-2)ctg^2x\,(2-4a-2a^2)ctgx+4a=0$$

$x\in(0;\pi)$

Обозначим $ctgx=t$

Получим $f(t)=a\cdot t^3+(2a^2-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$

Заметим, что $f(1)=0 \Rightarrow f(t)=(t-1)\cdot(at^2+(2a^2-2)t-4a)$

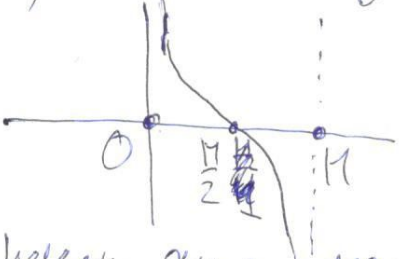
решим квадратное уравнение $at^2+(2a^2-2)t-4a$

от t

$$\frac{-(2a^2-2)\pm\sqrt{(2a^2-2)^2+16a^2}}{2a} = \frac{-(2a^2-2)\pm\sqrt{(2a^2+2)^2}}{2a}$$

$$=\frac{-(2a^2-2)\pm(2a^2+2)}{2a} = -2a;\ \frac{2}{a}$$, график $ctgx$, либо

$-2a$, либо $\frac{2}{a}$.



Относительное $\Rightarrow$ наибольшее расстояние между корнями не менее $[x_1;x_2]$, где $ctgx_1=1$, $ctgx_2=0$

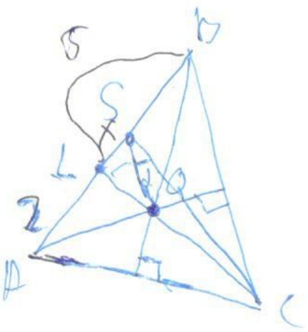
$x_1=\frac{\pi}{1}$ $x_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow [x_1-x_2=\frac{\pi}{4}]$, если $a=0$, то расстояние равно $\frac{\pi}{4}$, так как у уравнения будут только корни 0 и 1

Ответ $\frac{\pi}{4}$.

№7 Шестовик

Дано CL — высота, Q — ортоцентр треугольника ABC, $AL = 2$ $LB = 5$

Найти LS — ?



Решение. $\triangle LBQ \sim \triangle ALC \Rightarrow$

$$\frac{LQ}{AL} = \frac{LB}{LC} \Rightarrow AL \cdot LB = LQ \cdot LC = 10$$

Знаем $\angle QSC$ max, значит $\sin \angle QSC \Rightarrow$

$$\max = \frac{\sin \angle QSC}{QC} = \frac{\sin \angle SCL}{SQ} \Rightarrow \frac{\sin \angle SCL}{SQ} \text{ — максимальный}$$

$$\sin SCL = \frac{SL}{SC} = \frac{x}{\sqrt{x^2+CL^2}}, \quad SQ = \sqrt{x^2+LQ^2},$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+CL^2} \cdot \sqrt{x^2+LQ^2}} \text{ максимальный} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+CL^2} \cdot \sqrt{x^2+LQ^2}}{x}$$

минимальный $\quad \dfrac{\sqrt{x^2+CL^2} \cdot \sqrt{x^2+LQ^2}}{x} = \sqrt{x^2 + \dfrac{LC^2 \cdot LQ^2}{x^2} + CL^2+LQ^2} \geq$

$$\geq \sqrt{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{LC^2 \cdot LQ^2}{x^2}} + CL^2+LQ^2}$$

$= CL + LQ$ значит $x^2 + \dfrac{LC^2 \cdot LQ^2}{x^2} = 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \dfrac{LC^2 \cdot LQ^2}{x^2}}$

$$\Rightarrow \left(x^2 - \frac{LC \cdot LQ}{x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{LC \cdot LQ}{x} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{10}$$

Ответ $\sqrt{10}$.

№3 черновик

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$ Вычислить $f(f(f(f(f\dots f(2022)))))))$, если f применяется 1305 раз

Заметим что $1305 \vdots 3$: $1305 = 3\cdot 435\cdot 3$

попробуем вычислить $f(f(f(x)))$ первый шаг:

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-(f x)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1}{x^9-1}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9}{x^9-1}}} =$$

$$\sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}} \qquad (1)$$

Второй шаг $f(f(f(x))) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-(f(f(x)))^9}} =$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(1-\frac{1}{x^9}\right)}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}}$$

$= \sqrt[9]{x^9} = x$ и так, $f(f(f(x)))=x$, значит

$f(f(f(f(f(f(x)))))) = x$ и вообщем виде $\underbrace{f(\dots(f(x)))}_{3n}$ $= x$ (*)

так как $1035 = 3\cdot 435$, то $\underbrace{f(\dots(f(2022))\dots)}_{1035}$

5

№3 Черновик

$$= \underbrace{f(\dots(f}_{3\cdot 435}(2022))\dots) = (*) = 2022 \quad *$$

Ответ 2022

№5 Чистовик.

$a = t^3 - 121t$, $b = 2^t - 32$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

посмотрим когда $a > 0$: $t(t-11)(t+11) > 0$

$t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$

когда $b > 0$ $2^t > 32 \Rightarrow t \in (5; +\infty)$.

c больше: $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi k;$
$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, чтобы среди чисел, нужно чтобы какие-то две из a, b, c были полож.

1) если $a > 0$ $b > 0$, то $\underline{t \in (11; +\infty)}$

2) если $a > 0$ $c > 0$: так как $t (11; +\infty$ уже есть в ответе то рассмотрим $t \in (-11; 0)$ подходящие (когда $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k) \cap (-11; 0)$ неравно $\varnothing$): $k = -2, -1$ так как $\frac{2\pi}{3} - 6\pi < -11$
$\frac{\pi}{3} > 0$

$k = -2 \Rightarrow t (-11; \frac{2\pi}{3} + 4\pi)$

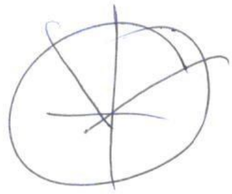
$k = -1 \Rightarrow t (\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi)$

3) если $b > 0$ $c > 0$ так как $t \in (11; +\infty)$ в ответ, возьмём $t \in (5; 11]$ подходящие $k = 1 \Rightarrow t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi)$

4

черновик

2022



$\frac{11}{6}$

46 | 49

19, 38, 57, 76, 95

46 39 5 4 6 $2022 - 1 \Rightarrow 2021 \mid 5$

2022 – 404,1

6

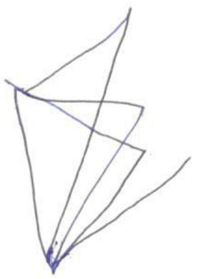
Ответ 6

25

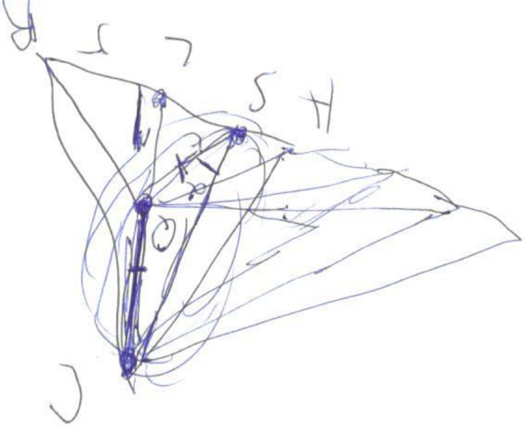
$a = t^3 - 121t = t(t-11)(t+11)$ $b = 2^t - 32$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t - \sin\frac{11}{6} = \sin t - \sin\frac{11}{6}$

$(t-11)(t+11)t$ a $2^t - 2^5$ b $\sin t - \sin\frac{11}{6}$



$Ф = 2022$



Xmin – p

8

Черновик

$$\frac{1}{\sqrt[9]{(1-2022^9)}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$1-22$

$1-2022^9$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-2022^9}}$$

1

$$\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt[3]{15}}}$$

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

$(4-1) = \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{1,5}$$

D

$$\frac{1}{\sqrt[9]{(1-2022^9)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-1}}$$

$$\frac{7}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{11}{(3\cdot 4)^2}$$

$$0,75 + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400}$$

$(1-x)(x^2-28\cdot x\cdot |y|$

$(1-x)(x^2-28\cdot x\cdot |y|\cdot 2$

9

Черновик.

$$at^3+(2a^2-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$$

$t_1-t_2=\min$ при

где $\boxed{t\in[0;\pi)}$

можно получить положение волка и следующий