



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Таранов Павел Игоревич**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	10	0	15	15	15

① Чистовик

Обозначим:

$a$  - вес, поднятый А

$b$  - вес, поднятый ВБ

$c$  - вес, поднятый В

$\max(a, b, c) - ?$

1/89

Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 220 & (1) \\ a + c = 240 & (2) \\ b + c = 250 & (3) \end{cases}$$

$$\text{или } 2(a + b + c) = 710 \quad | \quad (1) + (2) + (3)$$

$$a + b + c = 305$$

$$\begin{cases} a = 305 - (b + c) = 105 \\ b = 305 - 240 = 115 \\ c = 305 - 220 = 135 \end{cases}$$

$$\max(a, b, c) = c = 135$$

Ответ: 135 кг

② Числовик

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} x, y &\neq 0 \\ x, y &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$2/8y$$

$$xy = 2022x + 2022y$$

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$$

$$xy - 2022x - 2022y = 0$$

~~(xy)~~

$$(x - 2022)(y - 2022) - 2022^2 = 0$$

$$(x - 2022)(y - 2022) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

$$a = x - 2022$$

$$b = y - 2022$$

$$ab = 2022^2$$

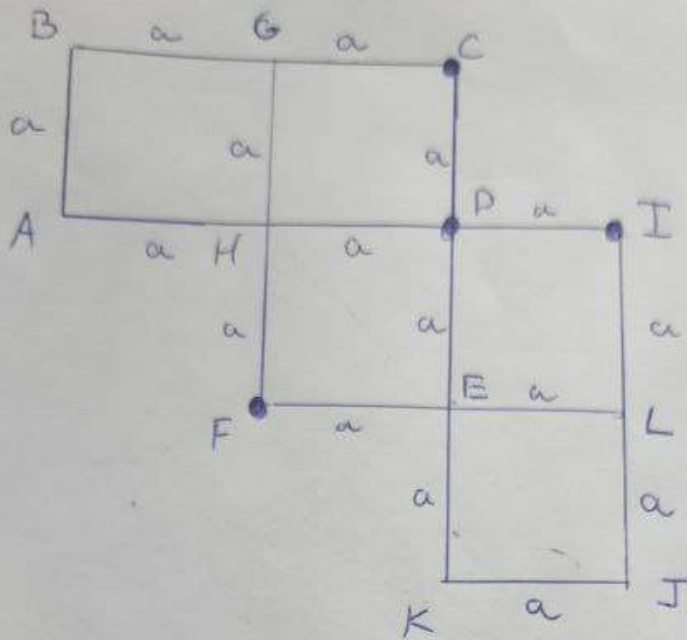
$\sqrt{2022^2}$  равно  $(2+1)(2+1)(2+1) = 27$  натуральных делителей, каждый из которых однозначно определяет пару  $(a, b)$  ( $a$  - этот делитель). Также существуют те же 27 делителей со знаком минус ( $a < 0; b < 0$ ). Решений  $(a, b)$   $27 \cdot 2 = 54$ , столько же решений  $(x, y)$ .

Ответ: 54



③ Да, можно. Например так:  
 Чистовик

3/89



Треугольника ~~и~~  $\square ABCD$ ,  $\square CEFG$ ,  $\square FHIL$ ,  
 $\square KDIJ$   
 равны, т.к. имеют длину  $2a$  и ширину  $a$ .

Три это:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \in \square ABCD \cap \square CEFG \\ I \in \square FHIL \cap \square KDIJ \\ F \in \square CEFG \cap \square FHIL \\ D \in \square ABCD \cap \square KDIJ \end{array} \right.$$

Ответ: да.

5) Числовик  $0 \leq a, b, c, d, e \leq 9$  5/9

$$157605 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79, (3, 5, 7, 19, 79 - \text{простые})$$

$$A = (\overline{ab+cd})(\overline{bc})$$

$$A = (\overline{ab+bc})(\overline{bc+cd})(\overline{cd+de})$$

Множитель в A имеет вид:

$$\overline{xy+yz}$$

$$(x, y, z) \in \{a, b, c, d, e\}$$

Заметим, что  $a, b, c, d > 0$ , т.к. с ними начинаются числа.

1) Пусть  $e \in \{x, y, z\}$

$$\overline{xy+yz} \geq 19 + 20 = 39 \Rightarrow \overline{xy+yz} \geq 35$$

$$157605 : (\overline{xy+yz})$$

(т.к.  $157605 \not\equiv 33$

$157605 \not\equiv 34$

$157605 \not\equiv 32$ )

2) Пусть  $e \notin \{x, y, z\}$

$$1 \leq x, y, z \leq 9$$

$$\overline{xy+yz} \geq 12 + 23 = 35 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 21 + 13 = 34 \\ 157605 : (\overline{xy+yz}) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Минимум множитель  $A \geq 35$



### ④ Числовик

4/9

Выпишем несколько первых членов последовательности

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$x_n$	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

Образована циклическая группа  $\mathbb{Z}_7$ .

(после первого цикла идут 1, 1, -1, которые однозначно задают следующие полные циклы).

Найдем  $x_{2022}$ .

$2022 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow$  Получится некоторое число целых циклов, после чего будут числа

n	2017	2018	2019	2020	2021	2022
$x_n$	1	1	-1	-1	-1	①

$$x_{2020} = 1$$

Ответ: 1

5) Числовик

5 разрозненные:  $5/8$   
Найдём значения множителей:  $6/9$

Пусть множитель  $n_1 \leq 3$ , тогда:

$n_1$  не может делиться ~~на~~ на  $\geq 3$  множителем  
для  $157605$ , т.к. только  $79 \geq 35$ .

$3 < 35 \Rightarrow n_1$  ~~делится на~~ <sup>это</sup> 2 (ровно) множителя

$3 \cdot 5 < 35$ ;  $3 \cdot 7 < 35$  ~~и т.д.~~

Пусть  $\exists$  множитель  $k \cdot 79$ ,  $k > 1$

под остальные 2 множителя  $A$  осталось  $\leq 3$   
множителя  $157605$  без  $79$ . Obviously такого не  
может быть.  $\Rightarrow 79$  - простой

$\Rightarrow \exists$  множители  $3 \cdot 19$  и  $5 \cdot 7$ , значит:

$$\{\overline{ab} + \overline{bc}, \overline{bc} + \overline{cd}, \overline{cd} + \overline{de}\} = \{35, 57, 79\} = G$$

1)  $\overline{ab} + \overline{bc} = 35 \Rightarrow$

$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$  (сначала рассмотрим эту ситуацию)  
(сначала рассмотрим эту ситуацию)  
(сначала рассмотрим эту ситуацию)

$$\left. \begin{array}{l} \overline{bc} + \overline{cd} = 23 + 3d \leq 23 + 39 = 62 \\ 23 + 3d \in G \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{bc} + \overline{cd} = 57; d=4$$

$$\overline{cd} + \overline{de} = 79 \Leftrightarrow 34 + 4e = 79$$

$e=5$   $\overline{abcde} = 12345$



⑤ Числовые

Прогоняем  $\times 2$ :

~~6/8~~

7/9

$$2) \overline{bc} + \overline{cd} = 35$$

$$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \\ d=3 \end{cases}$$

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{a1} + 12 \in \{57, 79\} \text{ } \left. \vphantom{\overline{ab} + \overline{bc}} \right\} \text{противоречие}$$

но  $\overline{a1} + 12 \stackrel{10}{=} 3$

$$3) \overline{cd} + \overline{de} = 35$$

$$\begin{cases} c=1 \\ d=2 \\ e=3 \end{cases}$$

$$\overline{bc} + \overline{cd} = \overline{b1} + 12 \in \{57, 79\} \text{ } \left. \vphantom{\overline{bc} + \overline{cd}} \right\} \text{противоречие}$$

но  $\overline{b1} + 12 \stackrel{10}{=} 3$

Итак, теперь рассмотрим другое размещение букв:  $21+14=35$

$$1) \overline{ab} + \overline{bc} = 35$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$$

$$\overline{bc} + \overline{cd} = 14 + 4d \in \{57, 79\} \Rightarrow d=3$$

$$\overline{cd} + \overline{de} = 43 + 3e = 79 \Rightarrow e=6$$

$$\overline{abcde} = 21436$$

5) Числовик

Тројцифрени  $\times 3$  :

7/8

2)  $\overline{cd} + \overline{bc} = 35$

8/9

$$\begin{cases} b=2 \\ c=1 \\ d=4 \end{cases} \quad \overline{a2} + 21 \in \{35, 79\} \text{ - произвољно}$$

3)  $\overline{cd} + \overline{de} = 35$

$$\begin{cases} c=2 \\ d=1 \\ e=4 \end{cases} \quad \overline{b2} + 21 \in \{35, 79\} \text{ - произвољно}$$

Другице предмањеници 35 в виду  $\overline{xy} + \overline{yz} =$   
нест, м.к.  $x, y \in \{1, 2\}$  (м.к.  $x+y=3, x \geq 1, y \geq 1$ )

1)  $x=1, y=2$

$$12 + \overline{2z} = 35 \Rightarrow z=3 \quad 12 + 23 = 35$$

2)  $x=2, y=1$

$$21 + \overline{1z} = 35 \Rightarrow z=4 \quad 21 + 14 = 35$$

$$\overline{abcde} \in \{12345, 21436\}$$

Одговори: 12345 или 21436



6) Чистовик

8/8 3/9

Оценка:

Будем считать кол-во использованных цветов на лампочку (суммарное), тогда у каждой лампочки есть 4 цвета, которыми она должна загореться. Эта в конце эта величина будет равна  $4 \cdot 4 = 28$ , изначально она равна  $4$ . Каждый ход мы добавим к этой величине  $\leq 3$  (т.к. меняется цвет 3 лампочек). Тогда кол-во ходов  $\leq \frac{28-4}{3} = 8$

Пример:

				1		1	5 4
1	2	3	5	7	5	2	7
	4		4		3	6	2
	5		5	1	4	6	7
3	4	6	1	3	1	5	7
	2		7		2		2

Ответ: 8



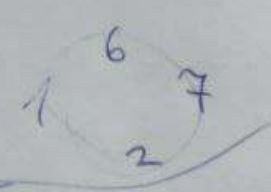
567 123 467 235 167  
① ② 3 5 ⑥ ⑦ 5 ① ③ ⑦ ④ ⑤ ④  
4 4 ⑤ ⑥ ③ 2

395 267 145 367  
1 6 7 1 3 4 7 3 2 4 5 2  
2 5 6 3 4 7 1

Чепуров  
4/4

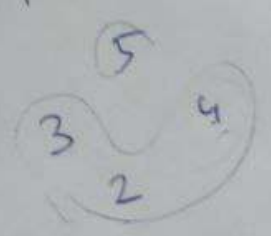
~~443~~  
~~45774~~  
167 246 1573 2374 156 4/7  
2346

235 467 135  
5 7 4 2 3 5 4 6  
3 2 4 6 1 2 3 5 7



235 674 135  
7 4 ③ 5 2 6 3 1  
⑥ ① 1 7 5

167 234 567 134  
⑤ ① ③ 1 5 6 7  
③ ④ 6 2 5 7  
2



423 765 237  
⑤ 1 3 ① 6 5 ⑦ 2 3  
6 7 2 4 ① 7 5 ⑦ 3  
2 4 ① ④ ① 1

D

Черновик ~~518~~ 517

черновик

2  
1 3 5 3  
4

1 2 4

5  
4 7  
1  
2 3 6

3  
6 7  
2  
1 4 5

84  
2 1  
7  
3 5 6

5  
2 6  
3  
1 4 7

~~2/4~~  
2/7

10507 | 7  
4 150 1  
35  
25  
07

157605 | 5  
31521  
15  
7  
5  
26  
25  
10  
10  
5

~~12+34~~  
13+24 = 37

31521 · 5  
31521 | 3  
3 10507  
15  
15  
21  
21  
0

1501 | 7  
14 121  
10  
7  
31

10507 · 3 · 5

1501 · 3 · 5 · 7

79 · 3 · 5 · 7 · 19

3 · 5 · 7 · 19 · 79

35 57 79  
33  
71

12 + 23 = 35

~~35 57 79~~  
35 57 79

1501 | 13  
201 | 13  
13 71

1501 | 17  
136 8  
141

1501 | 19  
133 179  
171  
171  
0

a=1  
b=2  
c=3  
d=4  
e=5

23 34  
34  
23  
b=1  
c=2  
d=3  
e=4  
c=1  
d=2  
e=3



$$xy = 2022y + 2022x$$

$$x, y \neq 0$$

$$xy = 2022(x+y)$$

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$$

$$xy - 2022y - 2022x = 0$$

Александр 6/7

$$(x-2022)(y-2022) = xy - 2022y - 2022x + 2022^2$$

$$(x-2022)(y-2022) = -2022^2$$

$$(x-2022)(y-2022) = -(2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2)$$

$$x-2022 = a \quad a = x-2022$$

$$y-2022 = b \quad b = y-2022$$

2016

$$ab = -1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

2017

$$\begin{array}{r} 2022 \overline{) 7} \\ 14 \\ \underline{62} \\ 56 \\ \underline{62} \\ 16 \\ \underline{6} \end{array}$$

$$a = -1$$

$$b = -2022^2$$

e + g

$$x = 2021$$

$$y = 2022 - 2022^2$$

28 24

8

a b c  
d

e

b c  
d

e f  
g c

+3

2014



671 5 4  
(3) 2

423 5 1  
6 7

334

7 1  
6 2

312

7 5  
6 4

546

3 7 6 7  
2 1 4 5

Черновик

1/4

1/7

$$a+b=220$$

$$a+c=240$$

$$b+c=250$$

$$2(a+b+c)=710$$

$$a+b+c=305$$

600+

$$10a+11b+c=35 \text{ неясно}$$

~~3/8~~

$$\begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 5 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \square \end{array}$$

3/7

33

$$\begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \square \end{array}$$

$$12+20$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \square \end{array}$$

$$13+2$$

$$12+23$$

$$\overline{ab} + \overline{bc}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \end{array}$$

$$a=2$$

$$b=1 \quad d=3$$

$$c=4 \quad e=6$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \end{array}$$

$$14+43$$

$$b=2$$

$$43+36$$

$$c=1$$

$$d=4$$

$$21436$$

$$21 + \overline{a2}$$

21

$$c=2$$

$$d=1$$

$$e=4$$



Чертежи 7/7

