МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Толкачева Мария Владимировна**

Класс: **11 класс**

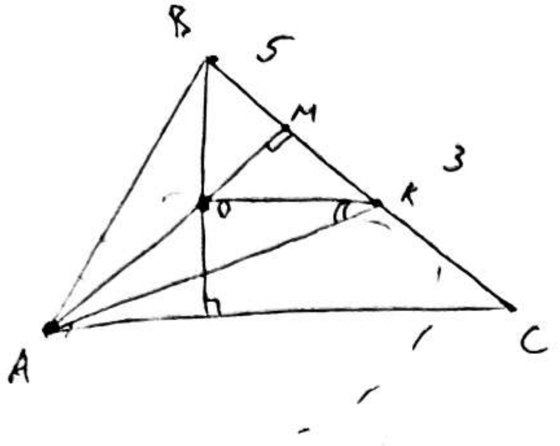
Технический балл: **85**

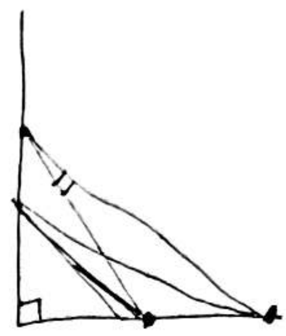
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	0	15

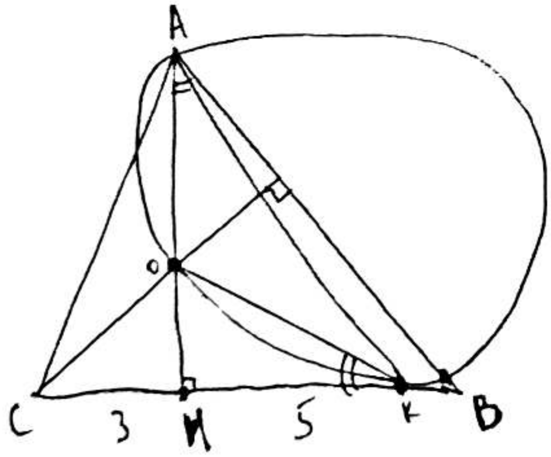
Черновик



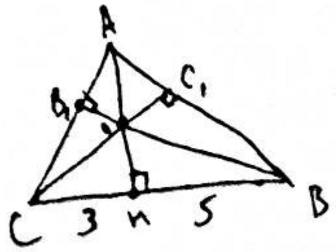


$$\frac{AO}{\sin AKO} = 2R$$

$$\sin 2KO = \frac{AO}{2R}$$



$$MK^2 = AM \cdot MO$$



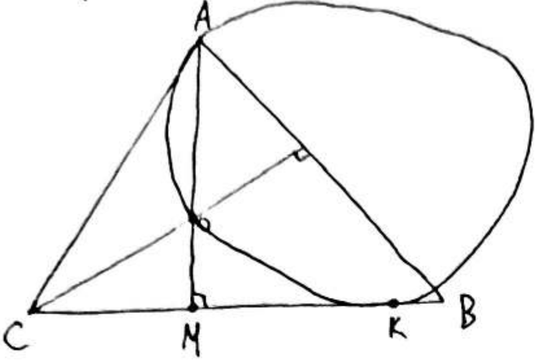
$$AO \cdot AM = AC \cdot AB_1$$

$$\left(\frac{AC}{CM} = \frac{OB}{OM};\right) AM = AC \cdot \frac{AB_1}{AO} = AC \cdot \frac{MB}{OB} = K \cdot \frac{5}{OB}$$

$$AC = \frac{3 \cdot OB}{OM}; \quad AM = \frac{3 \cdot 5}{OM}$$

Чистовик

Задача 7.



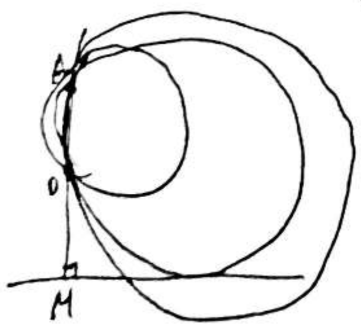
Пусть у нас есть точка K, отмеченная по данным правилам.

$(\angle AKO) < (\angle AKM) < (\angle ABM) < 90^\circ$, значит, $\angle AKO$ острый

~~чего синус~~ Значит, его синус тем больше, чем угол больше и наоборот.

Тогда по т. синусов: $\frac{AO}{\sin(\angle AKO)} = 2R$, где R – радиус описанной окружности $\triangle AKO$.

Тогда $\sin(\angle AKO) = \frac{AO}{2R}$. Т.к. AO - фиксированный, то R - наименьший из всех возможных:



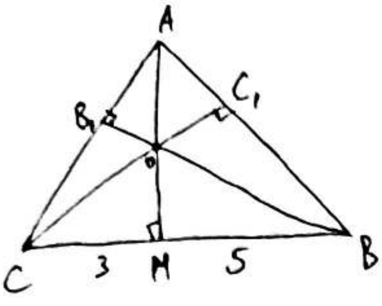
А наименьший возможный он - в случае касания.

Значит, описанная окружность $\triangle AKO$ касается прямой AB (в точке K).

(На самом деле может так оказаться, что точка K может тогда оказаться за пределами отрезка AB, но мы проверим позже, что так быть не могло)

Итак, т.к. K - точка касания, то Чистовик

$(MK)^2 = AM \cdot MO$



Из подобия △AOB_1 и △ACM:

$\frac{AO}{AB_1} = \frac{AC}{AM}$; $AM = AC \cdot \frac{AB_1}{AO}$ (1)

Из подобия △AOB_1 и BOM: $\frac{AB_1}{AO} = \frac{MB}{OB}$

Тогда в (1): $AM = AC \cdot \frac{MB}{OB}$ (2)

Из подобия △ACM и △BOM:

$\frac{AC}{CM} = \frac{OB}{OM}$; $AC = \frac{CM \cdot OB}{OM}$

Тогда во (2):

$$AM = \frac{CM \cdot OB}{OM} \cdot \frac{MB}{OB} = \frac{CM \cdot MB}{OM}$$

Тогда

$$(MK)^2 = AM \cdot MO = \frac{CM \cdot MB}{OM} \cdot OM = CM \cdot MB = 3 \cdot 5 = 15$$

Тогда $MK = \sqrt{15}$.

($\sqrt{15} < 5 = MB$, значит, K всё-таки лежит внутри AB, т.е. изначальное предположение о касании было верным.)

Ответ: $MK = \sqrt{15}$

Черновик

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}$$

$$f(f(x))=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}}=\left(\frac{1}{\frac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}}=\left(\frac{1-x^{11}}{-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}=$$

$$=\left(\frac{x^{11}-1}{x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}=\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}$$

$$f(f(f(x)))=\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}\right)^{\frac{1}{11}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}}=x$$

Значит

$$f(f(f(x)))=x$$

1306 $f(f(f(f(x))))=f(x)$

$1306\equiv 1$

$f(f \dots = f(x)$ $f(2022)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

Задача 3 Чистовик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}$$

$$f(f(x)) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}} = \left(\frac{1-x^{11}}{-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}} = \left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}$$

$$f(f(f(x))) = \left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}\right)^{\frac{1}{11}} = x$$

Значит, $f(f(f(x))) = x$.

Т.к. $1306 \equiv 1 \pmod 3$, то

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{1306\text{ раз}} = \underbrace{f(f\ldots f(x))\ldots)}_{1303\text{ раза}} = f(x).$$

Значит

$$\underbrace{f(f\ldots f(2022)\ldots)}_{1306\text{ раз}} = f(2022) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

Чистовик

Задача 2.

Рассмотрим всевозможные комбинации цифр, которые дают число, делящееся на 19:

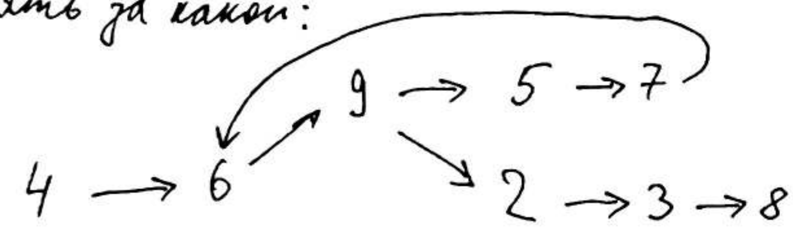
00, 19, 38, 57, 76, 95.

Аналогично на 23:

00, 23, 46, 69, 92.

Известно, что число начинается с 4, значит, вторая цифра однозначно равна 6 (делится на 23).

Составим граф, показывающий, какая цифра может стоять за какой:



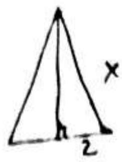
Всего в 2021-значном числе будет 2020 переходов по ребрам графа. Первый переход: $4 \to 6$.

Далее необходимо совершить 504 перехода по циклу $6 \to 9 \to 5 \to 7$, иначе, если пойти после 9 в 2, то число нарушится.

Итак, четвертая с конца цифра однозначно равна 6.

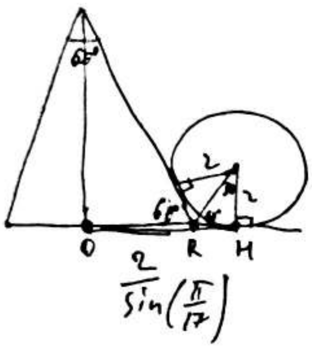
Значит, последняя: 3 или 7.

Ответ: 3 или 7.



$\frac{2}{x} = \sin\left(\frac{\pi}{17}\right)$ Черновик

$$x = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}$$

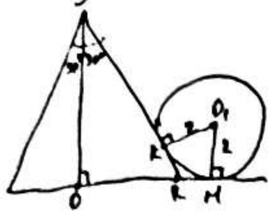


$$RH = 2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OR = OH - RH = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Чистовик

Задача 4.



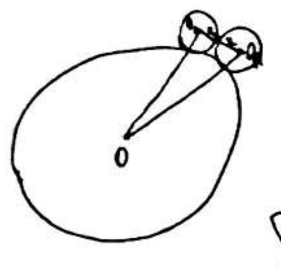
Нужно найти OR.

Найдем RH.

Т.к. угол OSR = 30° и $\triangle$ OSR-прямоугольный, то угол ORS = 60°.

Тогда $\angle$ KRH = 120°. Тогда в прямоугольном $\triangle RHO_1$: угол $O_1RH = 60°$. Тогда $RH = O_1H \cdot tg\angle RO_1H = 2 \cdot tg\, 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Найдем теперь OH:



~~Р~~ Рассмотрим проекцию сверху.

Тогда OH из предыдущего рисунка равен $OO_1 = OO_2$.

В $\triangle OO_1O_2$: $O_1O_2 = 2+2=4$. $\angle O_2OO_1 = \frac{2\pi}{17}$.

Тогда $OO_1 = 2 \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}$

Итак, $OH = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}$, $HR = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Тогда $R = OR = OH - HR = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ответ: $2 \cdot \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Черновик

19:

00, 19, 38, 57, 76, 95

23:

00, 23, 46, 69, 92

$$4 \to 6 \to 9 \to 5 \to 7$$

$$9 \to 2 \to 3 \to 8$$

$$2019 = 504 \cdot 4 + 3$$

$$6 \to 9 \to 5 \to 7$$

$$6 \to 9 \to 2 \to 3$$

Черновик

$a\,tg^3x + (2-a-a^2)\,tg^2x + (a^2-2a-2)\,tg\,x + 2a = 0$

$tg\,x = k$

$a\cdot k^3 + (2-a-a^2)k^2 + (a^2-2a-2)\cdot k + 2a = 0$

Заметим, что $k=1$ - корень

a

$(k-1)\left(ak^2 + (2-a^2)k - 2a\right)$

$$k = \frac{a^2-2 \pm \sqrt{(2-a^2)^2+8a^2}}{2a} = \frac{a^2-2 \pm \sqrt{4-\cancel{4}a^2+a^4+8a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{a^2-2 \pm \sqrt{(2+a^2)^2}}{2a} = \frac{a^2-2 \pm (2+a^2)}{2a} =$$

$\frac{a}{2};\ -\frac{2}{a}$

$k = 1,\ \frac{a}{2},\ -\frac{2}{a}$

$x = arctg(1),\ arctg\left(\frac{a}{2}\right),\ arctg\left(-\frac{2}{a}\right)$

$arctg\left(-\frac{2}{a}\right) = -\,arctg\left(\frac{2}{a}\right) = -arcctg\left(\frac{a}{2}\right)$

10 1

Чистовик

Задача 6.

$$a \cdot tg^3 x + (2-a-a^2) \cdot tg^2 x + (a^2-2a-2) tg\, x + 2a = 0.$$

$$tg\, x = k$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow k \in (-\infty; +\infty)$, тогда получим:

$$a \cdot k^3 + (2-a-a^2)k^2 + (a^2-2a-2) \cdot k + 2a = 0.$$

Заметим, что $k = 1$ – корень.
Тогда вынесем множитель $(k-1)$:

$$(k-1)\left(a \cdot k^2 + (2-a^2) \cdot k - 2a\right)$$

$$k = \frac{a^2 - 2 \pm \sqrt{(2-a^2)^2 + 8a^2}}{2a} = \frac{a^2 - 2 \pm (2+a^2)}{2a}$$

$$k = \frac{a}{2}; \ -\frac{2}{a}$$

Значит

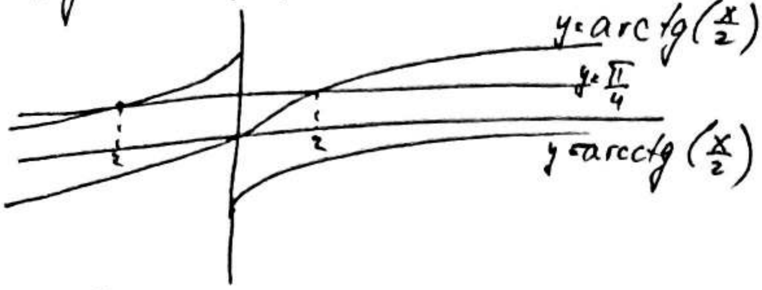
$$\left[\begin{array}{l} k = 1, \quad x = arctg(1) = \frac{\pi}{4} \\ k = \frac{a}{2}, \quad x = arctg\left(\frac{a}{2}\right) \\ k = -\frac{2}{a}, \quad x = arctg\left(-\frac{2}{a}\right). \end{array}\right.$$

$$arctg\left(-\frac{2}{a}\right) = -arctg\left(\frac{2}{a}\right) = -arcctg\left(\frac{a}{2}\right)$$

Значит, есть три функции, нужно найти модули их разностей в зависимости от a:

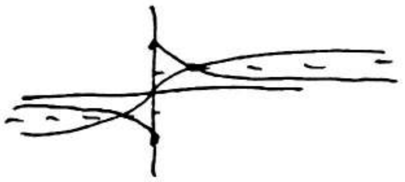
Задача 6, продолжение

~~Черновик~~ Чистовик



Т.к.

$\left|arctg(x) + arcctg(x)\right| = \frac{\pi}{2}$, то понятно, как выглядит график $arcctg\left(\frac{x}{2}\right)$



– симметрия отн-но $y = \frac{\pi}{4}$ при $x>0$ и
отн-но $y = -\frac{\pi}{4}$ при $x<0$.

Тогда минимальное расстояние между корнями ~~при~~ к равно $\frac{\pi}{2}$, (т.к. расстояние м/у $arctg(x)$ и $-arcctg(x)$ всегда $\frac{\pi}{2}$) при $a \in [-2;0] \cup [2;+\infty)$.

Ответ: $a \in [-2;0] \cup [2;+\infty)$. Значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Зо

Задача 1. ~~Черновик~~ Чистовик

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} =$$

$$\frac{2a+1}{(a\cdot(a+1))^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}$$

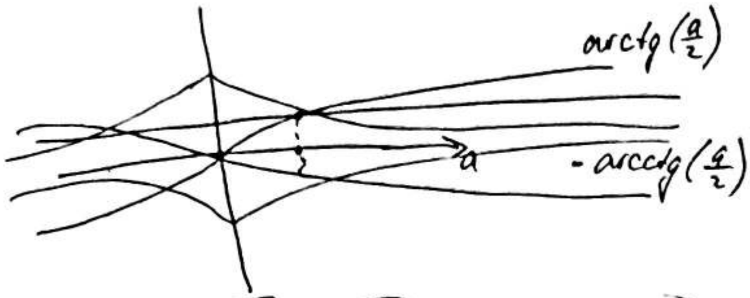
Значит,

$$B = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2}\right) = 1 - \frac{1}{40^2} < 1.$$

Значит, $A > B$

Ответ: $A > B$

Черновик



Т.к. $|arctg(x) + arcctg(x)| = \frac{\pi}{2}$, то $-arcctg(x) = -(\frac{\pi}{2} + arctg(x))$.

но у нас еще x

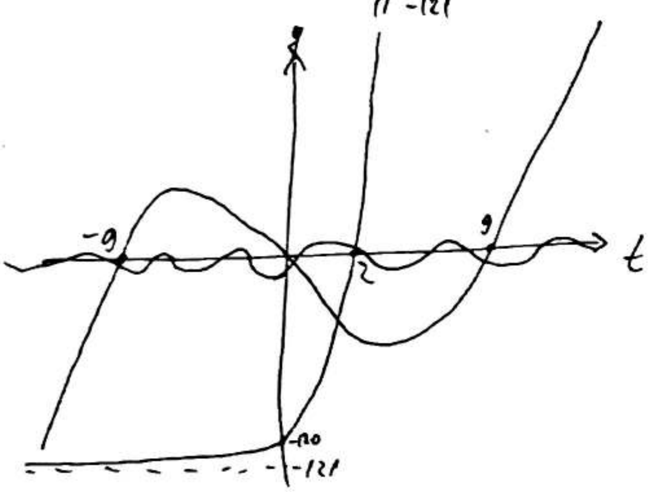
1.

Задача 5. ~~Черновик~~ Чистовик

$t^3-81t = t(t-9)(t+9)$

11^t-121

$\sin t-\frac{1}{2}$



При $t<-9$ среднее будет отрицательно

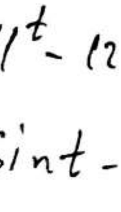
Среднее положительно, если хотя бы два положительны

t^3-81t положительна при $t\in[-9;0]\cup(9;+\infty)$

11^t-121 положительна при $t\in[2;+\infty)$

$\sin t-\frac{1}{2}$ положительна при $t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$

$\sin t>\frac{1}{2}$



Значит решением будет объединение попарных пересечений этих трех интервалов