МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Толпышкин Ярослав Михайлович**

Класс: **11 класс**

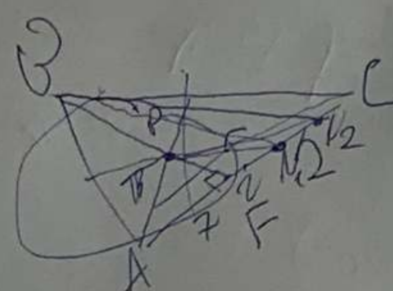
Технический балл: **100**

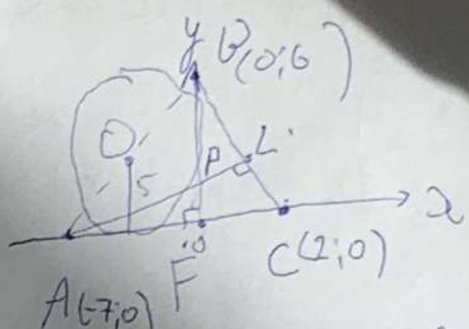
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Черновик Мат N6 VI





система координат с центром в F   ось x вдоль AC
ось y вдоль высоты

Пусть координата т. B(0; b)

ур-е прямой BC $y = b - \frac{b}{2}x$

Ур-е высоты из т. A $y=\frac{2}{b}(x+7)$ (перпендикулярны
(угл. коэф-т $\frac{2}{b} = \frac{-1}{-\frac{b}{2}}$)

т.к. ⊥ $y = b - \frac{b}{2}x$ $k_1 \cdot k_2 = -1$

координаты т. $P(0; \frac{14}{b})$

Рассмотрим все окружн, прохо через точки B, P и имеющие общ. точку N с прямой AC

$\frac{b^2+14}{2b} = \frac{b}{2}+\frac{7}{b}$ Если радиус окр-ти R, то угол $\angle BNP = \alpha$ опирается угол максимален если R минимален.

из $2R = \frac{BP}{\sin\alpha}$ $\sin\alpha = \frac{BP}{2R}$

Центры O всех таких окружн. лежат на сер.-перпенд. к BP. Минимальный R будет, когда окружн касается AC.

Если O правее т. N не окрн. Если левее R увеличится

т. O - координата (x; s) где $s = \frac{FP+FB}{2} = \frac{b+\frac{14}{b}}{2}$

Ур $s = OB$:

$s^2 = OB^2 = (x-0)^2+(s-b)^2 = x^2+s^2-2sb+b^2$

$x^2 = 2bs - b^2 = b^2+14-b^2 = 14$ $x = -\sqrt{14}$

$\sqrt{14}$ $\frac{b^2+14}{2b}\cdot 2b - b^2$

Черновик лист № 5

$$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)tg^2x + (2a^2-2a-1)tgx + 2a = 0$$

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$a + 1 - a - 2a^2 + 2a^2 - 2a - 1 + 2a$

$tgx(a\,tg^2x + (1-a-2a^2)tgx) + 2a^2 - 2a - 1 + 2a) + 2a = 0$

$tgx(tgx(a\,tgx + 1 - a - 2a^2) + 2a^2 - 2a - 1) + 2a = 0$

$a(tgx-1) - 2a^2 + 1)$

$t = tgx,\ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t \in (-\infty; +\infty)$

$a \cdot \frac{1}{2} + 1 - a - 2a^2 = \frac{1}{2}$
$= 1 - 2a^2 \cdot 1$
$+$
$2a^2 - 2a - 1$
$= -2a$
$-1 + 2a$
0

$t = 1$ корень по схеме Горнера

	a	$1-a-2a^2$	$2a^2-2a-1$	$2a$
1	a	$1-2a^2$	$-2a$	0

$a = 0$

$(t-1)(at^2 + (1-2a^2)t - 2a)$ $\quad a(t^2 + t(\frac{1}{a} - 2a) - 2)$

$at^2 + t(1-2a^2) - 2a$

$t_1 + t_2 = 2a^2 - 1$

$t_1 \cdot t_2 = -2a$

$\cdot \frac{-2a}{t_2}$

$\frac{-2a}{t_2} + t_2 = 2a^2 - 1$

$-2a + t_2^2 = 2a^2 t_2 - t_2$

$t_2(t_2 + 1) = 2a(1 + at_2)$

Получим $t_1 = \frac{-1}{a}$ $\quad t_2 = 2a$ $\quad a \neq 0$

$a = 0 \quad t^2 - t = 0$

$t = 0\ t = 1$ 2 корня $\quad t = 1\ t = 2a\ t = -\frac{1}{a}$

$2a$ и $-\frac{1}{a}$ разных знаков, есть один отриц. $t_1 < 0$

соответствующий x_1 — решение $tg x_1 = t_1$ также отрицат.

Всегда есть корень $x_2 = \frac{\pi}{4}$ 45° из ($t_2 = 1$)

$|x_1 - x_2| > \frac{\pi}{4}$

Расстояние $\frac{\pi}{4}$ достигается когда $a = 0$ $\quad a = 0$

$t_1 = 0\ t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0\ x_2 = \frac{\pi}{4}$

Черновик лист №4

N.5

$a = t^3 - 121t$ $\quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 2^t - 32$

$a \le b \le c$

$2^t - 32 > 0$

$2^t > 2^5$

① $t > 5$

$t^3 - 121t > 0$

$t(t^2 - 121)$

$t(t-11)(t+11) > 0$

② $\left[\begin{array}{l} -11 < t < 0 \\ t > 11 \end{array}\right.$ $\quad t(t-11)(t+11) \ge 2^t - 32$ $\quad (-11;0) \cup (11;+\infty)$

③ $t^3 - 121t \ge 2^t - 32$

$t(t-11)(t+11) \ge 2^t - 2^5$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Условие означ, что 2 или 3 числа > 0

$a = t^3 - 121t = t(t+11)(t-11)$

$-\;\; + \;\; - \;\; +$: -11, 0, 11

$b = 2^t - 32 = 2^t - 2^5$

$-\;\; +$: 5

$a > 0$ и $b > 0$ при $t \in (11; +\infty)$

$t \in (-5; 11] \cup (-11; 0)$

$c > 0$ также given, где $c > 0$

$c > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$

$\pi = 3{,}14$

$k = 0$ $\quad \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) \subset (1;3)$ не подх

$k = 1$ $\quad \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right) \subset (7;9)$ подх

$k = 2$ $\quad \left(\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}\right) \subset (11; +\infty)$ уже больше

$k = -1$ $\quad \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \subset (-11; 0)$

$k = -2$ $\quad -11 \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right)$

$k > 2$ не –

$\frac{13\pi}{3}$ $\quad \frac{3{,}14 \cdot 13}{3}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi$

$-1 = 4$

$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$

$k = -2$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi$

$\frac{\pi}{3} = \frac{3{,}14}{3} = 1$

$\pi = 3{,}14$

$\frac{10\pi}{3} < 11 < \frac{11\pi}{3}$ $\quad 3 < \pi < 3{,}3$ $\quad < 3{,}2$

$\left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (11; +\infty)$

Черновик Лист № II 3

$(1-2022^9)$ $\quad \frac{1}{(1-x^9)^{\frac{1}{9}}}$

N3. $\quad f(2022)$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[9]{-x^9}}=\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}=\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ $\cancel{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}$

$=-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$ при $x\neq 1$

$\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}=$ $\quad \sqrt[9]{x^9}=x$

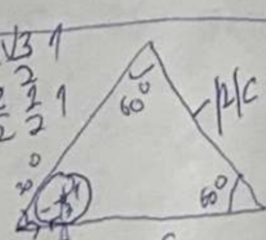
$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}}=x$

1305 цел на 3 $\Rightarrow f(\ldots f(x)\ldots)=x=2022$, $x\neq 1$

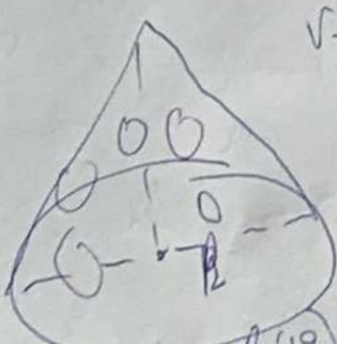
x 2022

N. $V=3$

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



р/с в и через сеч, провед. через центр одного из шаров



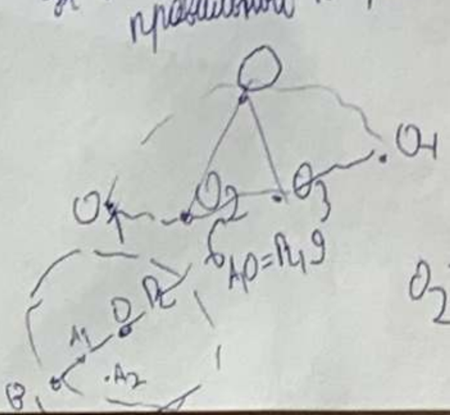
$AO_1=$

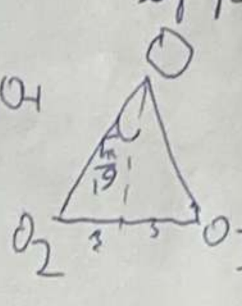
$\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg30=\frac{A_1O_1}{O_1A_1}\Rightarrow AO_1=\frac{A_1O_1}{tg30^\circ}=\frac{3\cdot 3}{\sqrt{3}}$

$=\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ AO_1

т.к. центры шаров (19) образуют правильный 19 угольник со стороной 6 $O_1O_2\ldots O_{19}$ — радиус окр., описанной около 19 уг-ка =





$R_{19}=\frac{6}{\sin\frac{\pi}{19}\cdot 2}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

точки касания образуют 19 уголн. $A_1A_2\ldots A_{19}$ равн. $O_1O_2\ldots O_{19}$

$R=A_1O_1+R_{19}=$

$=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}+3\sqrt{3}$

~~Лист~~ Лист №2 II Черновик

f(2022)

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$x = (1-x^3)$

19 или 23

19 . . . . . .

$\underbrace{\qquad\qquad}_{2020}$

19

23
2
5
3
7

4·19 =

Двузначные числа дел. на 19: 19
38
57
76
95

Двузн. числа дел на 23: 23
46
69
92

19
2
5
2
3
7

первая и вторая цифры разные не повторяются

нет чисел, начинающихся с 8

19 — 95 - 57 - 76 - 69
— 92 - 23 - 38 - x

505·4 = 2020

9576
9238

Исходное число

$\boxed{1}\underbrace{9576}\underbrace{9576}\underbrace{9576}$ период равен 4

. . . . $\underbrace{9576}$ $\underbrace{9576}$

. . . . 9238

2021 = 1 + 4·505

последняя цифра 6, можно заменить последнюю четверку на 9238

8 или 6

Черновик №1
Лист I

19 2
$\underbrace{\qquad\qquad}_{2020}$

21000 : 2000
$19 = 9 \cdot 2 + 1$
$5 \cdot 19$ 23

9
23

199 191
239 1924
231 193

$a = t^3 - 121t \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 2^t - 32$

$2^t > 2^5$

$t > 5$

$t^3 - 121t \le 2^t - 32 \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t^3 - 121t \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le 2^t - 32$

$2^t - 32 \le t^3 - 121t \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t(t^2 - 121) > 0$

$2^t - 32 \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le t^3 - 121t$

$-11 \quad 0 \quad 11$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le 2^t - 32 \le t^3 - 121$

$(-11; 0) \cup (11; +\infty)$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le t^3 - 121t \le 2^t - 32$

$t^3 - 121t \ge 2^t - 32$

$\cancel{t^3 - 121t - 2^t + 32 \ge 0}$

$\frac{2k+1}{(k(k+1))^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right) = 1 - \frac{1}{45^2} =$

$= \frac{2024}{2025}$

$45 \cdot 45$: 225, 180, 2025

$\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt[6]{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}$

$B = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$A < B$

Чистовик Лист N III 3

N. 5

$a = t^3 - 121t \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 2^t - 32$

$a = t(t^2 - 121) = t(t-11)(t+11)$ — + — + на $-11 \quad 0 \quad 11$

$b = 2^t - 2^5$ — + на 5

$a > 0$ и $b > 0$ при $t \in (11; +\infty)$

a также учтем, что $c > 0 \quad t \in (-5; 11] \cup (-11; 0)$

$c > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$

$\frac{2\pi}{3}+2\pi k \qquad \frac{\pi}{3}+2\pi k$

$k=0 \quad (\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}) \subset (1;3)$ подходит

$k=1 \quad (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}) \subset (7;9)$ подх

$k=2 \quad (\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}) \subset (11; +\infty)$ уже есть

$k=-1 \quad (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \subset (-11; 0)$

$k=-2 \quad -11 \in (-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3})$

$\frac{10\pi}{3} < 11 < \frac{11\pi}{3}$

$\pi \approx 3{,}14 \qquad 3 < \pi < 3{,}3$

$3{,}2$

$\boxed{\text{Ответ: } (-11; -\frac{10\pi}{3}) \cup (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \cup (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}) \cup (11; +\infty)}$

N 6

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0$

$t = tg\,x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t \in (-\infty; +\infty)$

$t = 0 \quad \cancel{2a = 0}$

$t = 1 \quad \cancel{a + 1 - a - 2a^2 + 2a^2 - 2a - 1 = 2a}$ схема Горнера

корень

	a	$1-a-2a^2$	$2a^2-2a-1$	$2a$
1	a	$1-2a^2$	$-2a$	0

$t_1 + t_2 = 2a - \frac{1}{a}$

$t_1 \cdot t_2 = -2$

$\Rightarrow t_1 = -\frac{1}{a} \quad t_2 = 2a$

$(t-1)(at^2 + t(1-2a^2) - 2a) = a(t-1)(t^2 + t(\frac{1}{a} - 2a) - 2)$

$a = 0$ ① ② $a \neq 0$

$t^2 - t = 0 \qquad t = 1 \quad t = 2a \quad t = -\frac{1}{a}$

$t = 0 \quad t = 1$

соответствующий x_1 - решение $tg\,x_1 = t_1$ также отрицат.

всегда есть корень $x_2 = \frac{\pi}{4}$ из $t_2 = 1$

$|x_1 - x_2| > \frac{\pi}{4}$ Расстояние $\frac{\pi}{4}$ достигается

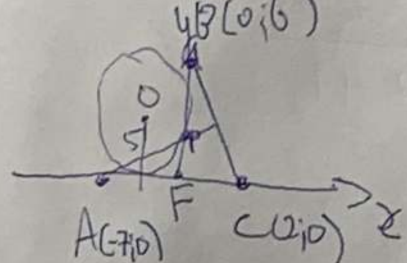
$2a$ и $-\frac{1}{a}$ разных знаков, если один отрицат. $t_1 < 0$

при $a = 0$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}\ (a=0)}$

Мистовин Мат N 4 II

N 7.



Введем систему координат с центром в точке F.
ось x вдоль AC
ось y вдоль высоты

Пусть координата точки B (0; 6)

уравнение прямой BC: $y = 6 - \frac{6}{2}x$

Уравнение высоты из т. A: $y = \frac{2}{6}(x+7)$

(~~tg~~ коэф. $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-\frac{6}{2}}$)

т.к $\perp$ $y = 6 - \frac{6x}{2}$, $k_1 \cdot k_2 = -1$

координата т. $P(0; \frac{14}{6})$

Рассмотрим все окружности, проход. через точки B, P и имеющие общую точку N с прямой AC.
Если радиус окружности R, то угол $\angle BNP = \alpha$ определ.
из $2R = \frac{BP}{\sin\alpha}$ $\sin\alpha = \frac{BP}{2R}$

угол максимален, если R минимален.
Центры O всех таких окружностей лежат на сред. перпендикуляре к BP.
Мин. R будет, когда окружности касаются AC.
Если O правее, точки N не будет. Если левее, R увеличен.
координаты точки $O(x; s)$, где $s = \frac{FP+FB}{2} = \frac{6+\frac{14}{6}}{2}$

Уравнение $s = OB$:

$$s^2 = OB^2 = (x-0)^2 + (s-6)^2 = x^2 + s^2 - 2s6 + 6^2$$

$$x^2 = 2s6 - 6^2 = 6^2 + 14 - 6^2 = 14 \Rightarrow x = -\sqrt{14}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{14}}$

Чистовик лист N II 2

N. 3

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}=\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}$

$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[9]{-x^9}}=-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$ при $x\neq 1$

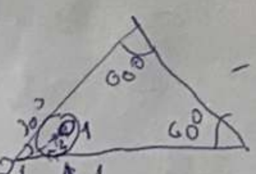
$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}}=x$

1305 цел на 3 $\Rightarrow f(\ldots f(x)\ldots)_{x\neq 1}=x$

Ответ: 2022

N 4

$tg\,30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$



– равностор. треугольник

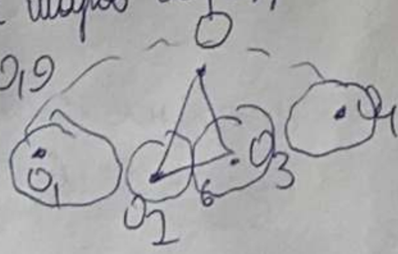
$OA_1=3$

$tg\,30^\circ=\frac{A_1O_1}{OA_1}\Rightarrow O_1A_1=\frac{A_1O_1}{tg\,30^\circ}=\frac{3\cdot3}{\sqrt3}=3\sqrt3$

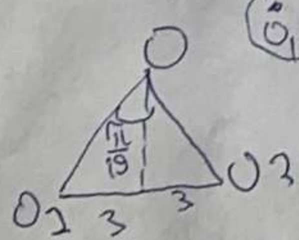
OO_1A_1 – прямоуг Δк

$\angle O_1A_1O_1=90^\circ$

Центры шаров образуют правильный 19угольник со стороной 6 $O_1O_2\ldots O_{19}$

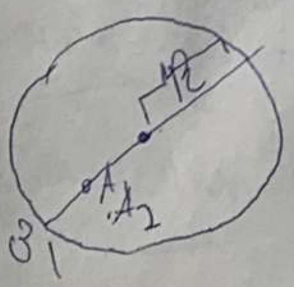


Радиус окруж, описанной около 19угольника $=R_{19}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$



точки касания образуют 19угольник $A_1A_2\ldots A_{19}$ равный $O_1O_2\ldots O_{19}$

$R=A_1O_1+R_{19}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}+3\sqrt3$



$\boxed{\text{Ответ: } R=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}+3\sqrt3}$

Чистовик лист N 1 I

Задача 1

$$\frac{2k+1}{(k(k+1))^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right) = 1 - \frac{1}{45^2} =$$

45^2

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$= \frac{2024}{2025}$$

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$\frac{2024}{2025} < 1$$

$A < B$

Ответ: $A < B$

N. 2

Двузначные числа, делящ. на 19: 19, 38, 57, 76, 95

делящ. на 23: 23, 46, 69, 92

первая и вторая цифры почти не повторяются => число восстанавливается почти однозначно

1(9) — 95 – 57 – 76 – 6(9) нет чисел, начинающихся с 8

↘ 92 – 23 – 38 – x

Исходное число

$1, \underbrace{9576}\underbrace{9576}\underbrace{9576} \ldots \boxed{9576}\boxed{9576}$

$\boxed{9238}$

период = 4

$2021 = 1 + 4 \cdot 505$

последняя цифра 6, можно заменить на 9238 => 6 или 8

Ответ: 6 или 8