**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Фельдман Роман Григорьевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |

Черновик

Задача 1.

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

По индукции докажем, что:

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{2n-1}{((n-1)n)^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

База: $n=2 \Rightarrow \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{2n-1}{((n-1)n)^2} + \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = 1 - \frac{1}{n^2} +$

$$+ \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = 1 + \frac{-(n+1)^2 + 2n+1}{(n(n+1))^2} = 1 + \frac{-n^2-2n-1+2n+1}{(n(n+1))^2} =$$

$$= 1 - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Значит $A = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 = B$

Ответ: B больше, чем A

Задача 2.

Рассмотрим какие цифры могут идти после 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

| Цифры | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возможные следующие цифры | 0 | 9 | 3 | 8 | 6 | 7 | 9 | 6 | ∅ | 2,5 |

Черновик.

2 приводим к 3, а 3 к 8, после 8 цифр нет.

Поэтому 2, 3, 8 не могут стоять не в последних 3 цифрах числа.

Без их учёта 1 приводим к 9, 9 к 5, 5 к 7, 7 к 6, 6 к 9.

Т.е. вторая цифра 1, далее идут циклы 9576. Поэтому число имеет вид:

$$\underbrace{1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}}_{\text{циклы до конца}\ =2+4\cdot 504}$$

в конце 2018-ая цифра 9, а далее 576 или 238 на последних 3 местах, последняя цифра 6 или 8.

Ответ: 6 или 8

Задача 3

Пусть $a_n = (\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n})^7$, $x=2022$ $(a_0 = x^7)$

$$a_{n+1} = (\underbrace{f(\ldots f(x)\ldots)}_{n+1})^7 = \left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-(\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{n})^7}}\right)^7 = \frac{1}{1-a_n}$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_n}} = \frac{1-a_n}{1-a_n-1} = \frac{1-a_n}{-a_n} = 1-\frac{1}{a_n} \ (\text{при } a_n \neq 0)$$

$$a_{n+3} = \frac{1}{1-a_{n+2}} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a_n})} = a_n$$

Значит, $a_{1034} = a_2$, т.к. $1304 \equiv 2 \pmod 3)$

$$a_2 = 1-\frac{1}{a_0} = 1-\frac{1}{2022^7}$$

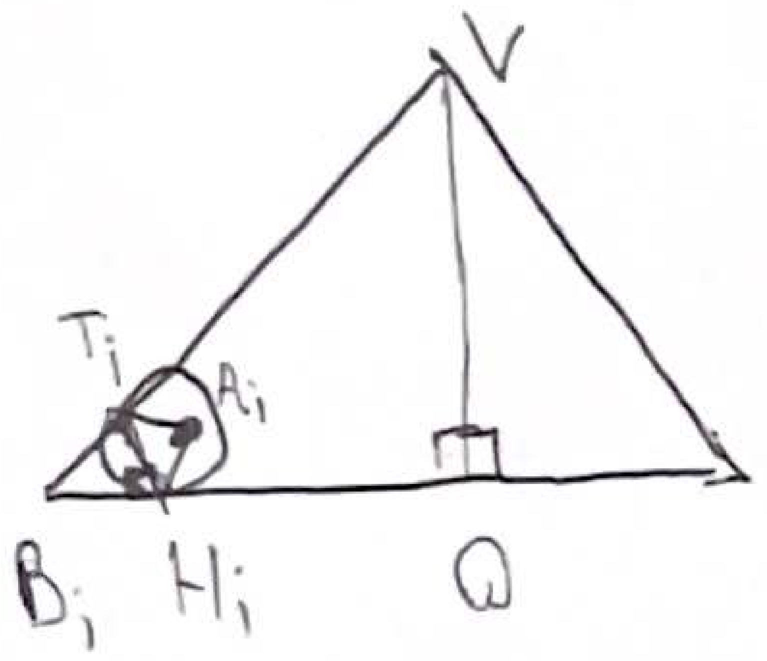
$$\underbrace{f(f(\ldots(f(2022))\ldots)}_{1304} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Задача 4. Чистовик.

Пусть $A_1, \dots, A_{13}$ – центры шаров, $H_1, \dots, H_{13}$ – их проекции на основание конуса. $A_iA_{i+1}=4$, $1 \leq i \leq 13$ (где $A_{14}=A_1$), $A_iH_i = A_{i+1}H_{i+1} = 2$

$A_iH_i \parallel A_{i+1}H_{i+1}$, т.к. оба перпендикулярны основанию. Поэтому $A_iH_iH_{i+1}A_{i+1}$ – прямоугольник, $H_iH_{i+1} = A_iA_{i+1} = 4$. Пусть $V$ – вершина конуса, $O$ – центр основания. $VO \perp$ плоскости основания, значит $\parallel A_iH_i$. Проведём сечение $VOA_iH_i$:




получим треугольник $VOB_i$, где $B_i$ по ту же сторону от $VO$, что и $A_i$ и такой же треугольник, симметричный $VOB_i$ относительно $VO$.

Пусть $T_i$ – точка касания $i$-ого шара с $VB_i$.

$\angle B_iVO = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, $\angle VB_iO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $A_iH_i = A_iT_i = 2$,

$\angle T_iA_iH_i = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$, $T_iH_i = \sqrt{2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos 120^\circ} = 2\sqrt{3}$.

$\angle B_iT_iH_i = \angle T_iH_iB_i = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, т.к. $B_iT_i = B_iH_i$ – как касательные.

$= 2\sqrt{3}$

$\angle B_iT_iH_i = \angle T_iH_iB_i = \angle H_iB_iT_i = 60^\circ \Rightarrow B_iT_i = T_iH_i = B_iH_i = 2\sqrt{3}$

$H_iO = R - 2\sqrt{3}$, где $R = OB_i$ – радиус основания. Тогда все треугольники $H_iH_{i+1}O$ (где $H_{14}=H_1$) равны по 3 сторонам: $R-2\sqrt{3}$, $R-2\sqrt{3}$ и 4.

Поэтому $\angle H_iOH_{i+1} = \frac{2\pi}{13}$ (т.к. вместе дают $2\pi$), пусть $S_i$ – середина $H_iH_{i+1}$.

Чистовик

$H_iS_i = S_iH_{i+1} = 2$, $\angle H_iOS_i = \angle H_{i+1}OS_i = \frac{\pi}{13}$


(т.к. $OS_i$ - медиана в равнобедренном треугольнике $\triangle H_iOH_{i+1}$), значит $OS_i$ - высота и биссектриса,

$\angle OS_iH_i = 90^0$, $OH_i = \frac{H_iS_i}{\sin\angle H_iOS_i} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}$, $R = OH_i + H_iB_i = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$.

Чистовик

Задача 5.

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

Среднее – положительное => в наборе не больше 1 отрицательного числа.

Рассмотрим значения каждого из чисел

$a > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 81) > 0 \Leftrightarrow (t-9)(t)(t+9) > 0 \Leftrightarrow$

$t \in (-9; 0) \cup (9; +\infty)$

$b = 11^t - 121 > 0 \Leftrightarrow 11^t > 11^2 \Leftrightarrow t \in (2; +\infty)$

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),$

$k \in \mathbb{Z}$

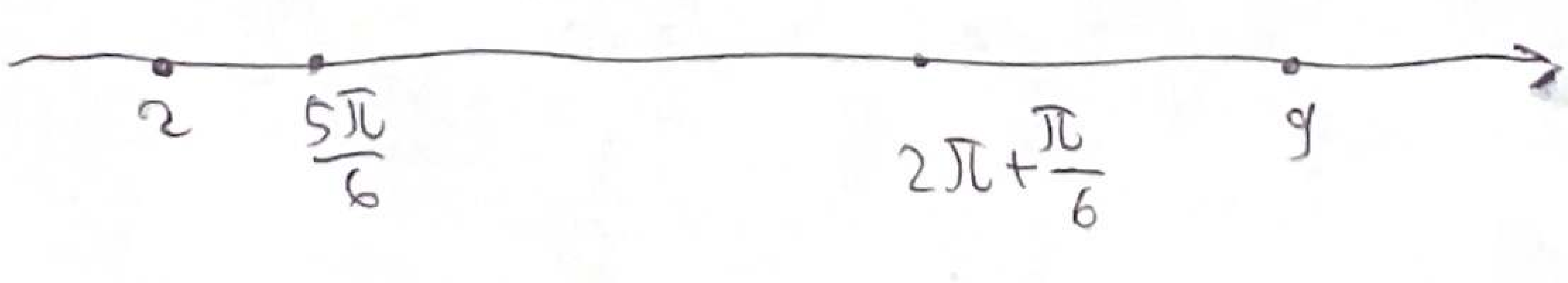
Пусть $a, b > 0 \Rightarrow t \in ((-9; 0) \cup (9; +\infty) \cap (2; +\infty)) \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (9; +\infty)$

Пусть $a, c > 0$, $b \leq 0 \Rightarrow t \in (-9; 0)$


$\frac{5\pi}{6} - 4\pi < -3\pi - 3.3 = -9 \Rightarrow t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7}{6}\pi\right)$

Пусть $b, c > 0$; $a < 0 \Rightarrow t \in (2; 9]$




$\frac{5\pi}{6} > \frac{5 \cdot 3}{6} = 2{,}5 > 2$

$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2 \cdot 3 + \frac{3}{6} = 6{,}5$ ; $2\pi + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 4 + \frac{4}{6} = 8\frac{4}{6} < 9$

$2\pi + \frac{5\pi}{6} < 3{,}15 \cdot \cancel{2}\frac{5}{6} = \frac{315}{100} \cdot \frac{18}{6} = \frac{105 \cdot 17}{200} = \frac{1785}{200} < \frac{1800}{200} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

Чистовик

Ответ: $t \in \left(-\frac{11}{6}\pi; -\frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi+\frac{\pi}{6}; 2\pi+\frac{5\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

Задание 6.

$$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tgx + 2a = 0$$

$$(a\,tg^3x - a\,tg^2x) + (tg^2x - 2a^2tg^2x + 2a^2tgx - tgx) + (-2a\,tgx + 2a) = 0$$

$$(tgx-1)(a\,tg^2x + (1-2a^2)tgx - 2a) = 0$$

$tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ($\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) — корень

$y = tgx$

$$ay^2 + (1-2a^2)y - 2a = 0$$

$$D = (1-2a^2)^2 + 4a \cdot 2a = 4a^4 - 4a^2 + 1 + 8a^2 = 4a^4 + 4a^2 + 1 =$$
$$= (2a^2+1)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{2a^2 - 1 \pm (2a^2+1)}{2a}, \quad y_1 = \frac{4a^2}{2a} = 2a, \quad y_2 = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$$

Итого корни $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = arctg(2a)$, $x_3 = arctg\left(-\frac{1}{a}\right)$
(при $a \neq 0$)

при $a=0$ $\quad tgx = 0 \Leftrightarrow a\,tg^2x + (1-2a^2)tgx - 2a = 0$

$\Updownarrow$

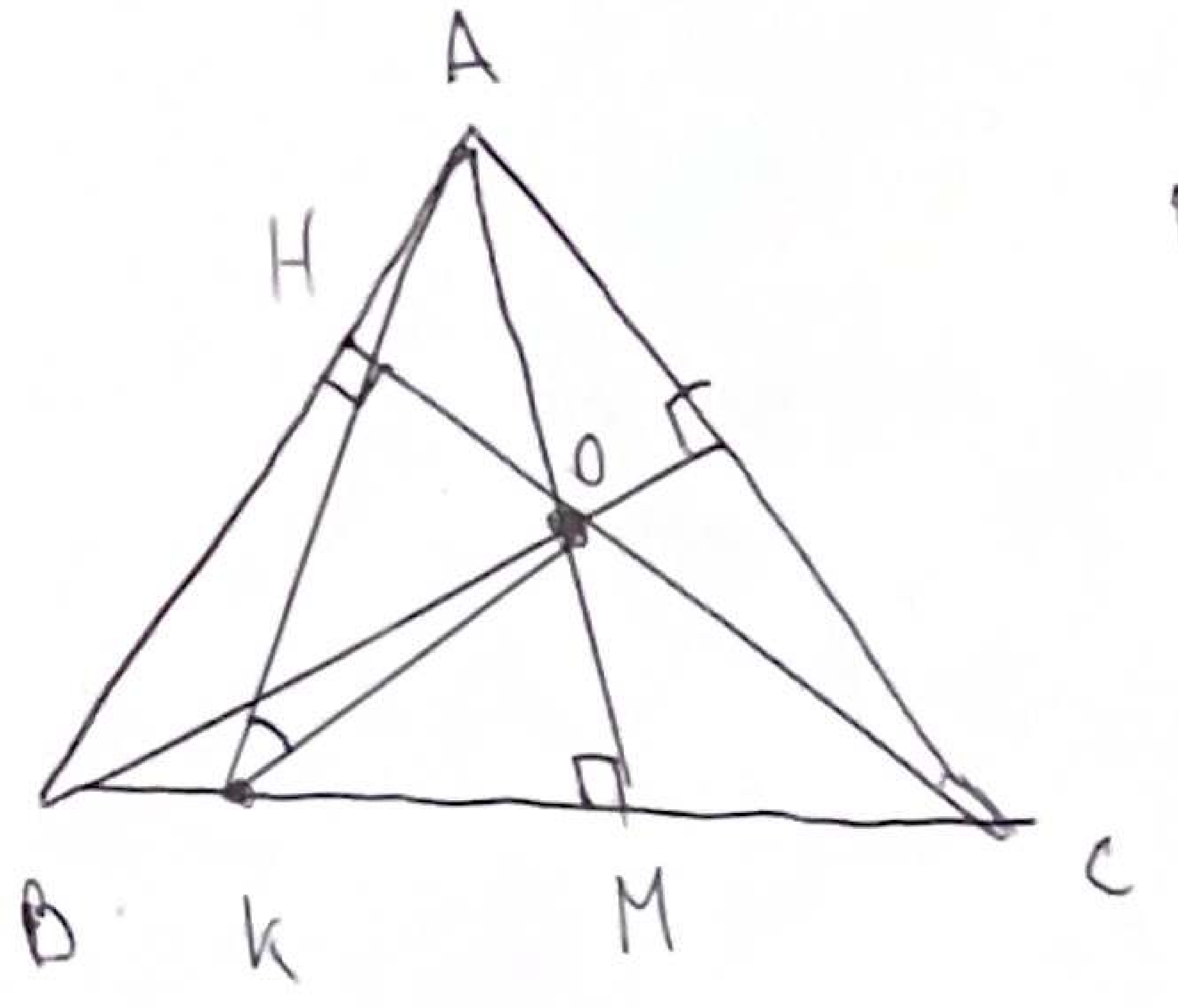
$x = 0$ и наибольшее расстояние между двумя корнями это $\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

при $a \neq 0$ либо $a > 0$, тогда $-\frac{1}{a} < 0$, $arctg\left(-\frac{1}{a}\right) < 0$ и $\frac{\pi}{4} - arctg\left(-\frac{1}{a}\right) > \frac{\pi}{4}$, либо $a < 0$, тогда $2a < 0$, $arctg(2a) < 0$ и $\frac{\pi}{4} - arctg(2a) > \frac{\pi}{4}$, т.е. при $a \neq 0$ максимальное расстояние между корнями больше, чем при $a = 0$.

Ответ: при $a = 0$, расстояние $\frac{\pi}{4}$.

Чистовик

Задача 7.



Решение:

Пусть CH – высота $\triangle ABC$.

$\angle OCH = 90^\circ - \angle HBC = \angle BAM$,

$\angle OMC = \angle AMB = 90^\circ$, поэтому

$\triangle CMO \sim \triangle AMB$ (по 2 углам)

и $\frac{CM}{AM} = \frac{OM}{BM}$, $MO \cdot MA = MC \cdot MB =$

$= 3 \cdot 5 = 15$.

Пусть $KM = x$. $\angle AKO = \angle AKM - \angle OKM = \operatorname{arcctg}\frac{AM}{x} - \operatorname{arcctg}\frac{OM}{x} \in$

$\in (0; \frac{\pi}{2})$, т.к. $0 < \operatorname{arcctg}\frac{OM}{x} < \operatorname{arcctg}\frac{AM}{x} < \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{AM}{x} - \operatorname{arcctg}\frac{OM}{x}) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{AM}{x}) - \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{OM}{x})}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{AM}{x})\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{OM}{x})} =$

$$= \frac{\frac{AM}{x} - \frac{OM}{x}}{1 + \frac{AM}{x} \cdot \frac{OM}{x}} = \frac{(AM - OM)x}{x^2 + MO \cdot MA} = \frac{OA \cdot x}{x^2 + 15}$$

$x > 0$, поэтому по неравенству о средних

$x^2 + 15 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 15} = 2\sqrt{15}\,x$, $\frac{OA \cdot x}{x^2 + 15} \leq \frac{OA \cdot x}{2\sqrt{15} \cdot x} =$

$= \frac{OA}{2\sqrt{15}}$, причём равенство достигается при

$x^2 = 15$, $x = \sqrt{15}$. Такая ~~точка~~ точка K на BC

действительно есть, т.к. $\sqrt{15} < BM = 5$.

Поэтому в ней $\angle AKO$ максимален (т.к. он лежит в $(0; \frac{\pi}{2})$, при $x = \sqrt{15}$ его тангенс максимален и тангенс возрастает на $(0; \frac{\pi}{2})$)

Ответ: $\sqrt{15}$

Страница 7.

Задача 1. ЧЕРНОВИК

$$b = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

По индукции докажем, что:

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

База: $n=2 \Rightarrow \frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$

Переход: $n \to n+1$: $\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \dots + \frac{n+1}{(n-1)\cdot n}$ +

$$+ \frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2} = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} =$$

$$= 1 + \frac{-(n+1)^2 + 2n+1}{(n(n+1))^2} = 1 + \frac{-n^2-2n-1+2n+1}{(n(n+1))^2} =$$

$$= 1 - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Значит $A = 1 - \frac{1}{45} < 1 = b$

Ответ: $B > A$

Задача 5.

ЧЕРНОВИК

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

Среднее - положительно => в наборе не больше 1 отрицательного числа.

Рассмотрим значения каждого из чисел

$a > 0 \iff t(t^2-81) > 0 \iff (t-9)t(t+9) > 0 \iff t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$

$b = 11^t - 121 > 0 \iff 11^t > 11^2 \iff t \in (2;+\infty)$

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0 \iff \sin t > \frac{1}{2} \iff t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Пусть $a, b > 0 \Rightarrow t \in ((-9,0) \cup (9;+\infty)) \cap (2;+\infty)) \Rightarrow t \in (9;+\infty)$

Пусть $a, c > 0$, $b \leq 0 \Rightarrow t \in (-9;0)$

$-9 \quad -2\pi \quad -6 \quad -3 \quad 0$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi < -3\pi < -3 \cdot 3 = -9 \Rightarrow t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

Пусть $b, c > 0$; $a < 0 \Rightarrow t \in (2;9]$

$2\pi + \frac{\pi}{6} \quad 9$

$t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

$9 \geq$

$\frac{1785}{200} < \frac{1800}{200}$

$\frac{315}{100} \cdot \frac{18}{6} = \frac{105 \cdot 17}{200} =$

$2 \cdot 3 \cdot 4$

$2\pi + \frac{\pi}{6} \cdot 2{,}56$

$2\pi + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 4 + \frac{4}{6} = 8\frac{4}{6} < 9$

Задача 3. ЧЕРНОВИК

Пусть $a_n = (\underbrace{f(f(f(\dots f}_{n}(x)\dots)))^7$, $x = 2022$ $a_0 = x^7$

$a_{n+1} = (\underbrace{f(\dots f}_{n+1}(x)\dots))^7 = \left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-(\underbrace{f(\dots f}_{n}(x)\dots))^7}}\right)^7 =$

$= \dfrac{1}{1-a_n}$ (при $a_n \neq 1$)

$a_{n+2} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a_n}} = \dfrac{1-a_n}{1-a_n-1} = \dfrac{1-a_n}{-a_n} = 1 - \dfrac{1}{a_n}$ (при $a_n \neq 0$)

$a_{n+3} = \dfrac{1}{1-a_{n+2}} = \dfrac{1}{1-\left(1-\frac{1}{a_n}\right)} = a_n$, значит $a_{1304} =$

$= a_2$, т.к. $1304 \equiv 2 \pmod 3$

$a_2 = 1 - \dfrac{1}{1} = 1 - \dfrac{1}{2022^7}$

$a_{1304} = 1 - \dfrac{1}{2022^7}$

$\underbrace{f(f\dots f}_{1304}(2022)\dots) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}}$

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

ЧЕРНОВИК

Задача 2.

Рассмотрим какие цифры могут идти после 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6:

| цифра | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возможные следующие цифры | 0 | 9 | 3 | 8 | 6 | 7 | 9 | 6 | ~~0~~ | 2,5 |

2 приводим к 3, а 3 к 8, после 8 цифр нет.

Поэтому 2, 3, 8 не могут стоять не в последних 3 цифрах числа.

Без их учёта 1 приводит к 9, 9 к 5, 5 к 7, 7 к 6, 6 к 9.

Т.е. 1 цифра 1, далее идут циклы 95 7 6. Поэтому число имеет вид 195769576 ... 9576

$2 + 4 \cdot 504$

В конце 2018ая цифра 9, а далее 576 или 238. На последних 3 местах, последняя цифра 6 или 8.

Ответ: 6 или 8

Задача 4.

# ЧЕРНОВИК

Пусть $A_1 \ldots A_{13}$ – центры шаров.
$H_1, \ldots, H_{13}$ – их проекции на основание конуса.

A