МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Финаревский Леонид Борисович**

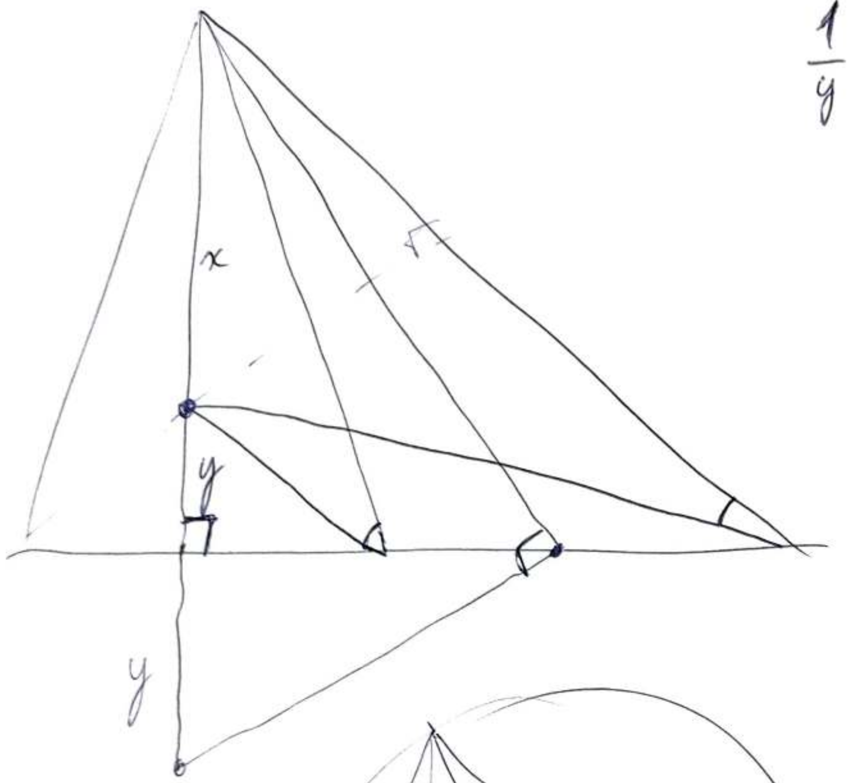
Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15



$$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}+1}-\frac{1}{(x+y)}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{(x+y)^2}+1}=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}+1}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{\cancel{x}+}{\quad}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{a^2+y^2}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{(x+y)^2}{a^2+(x+y)^2}$$

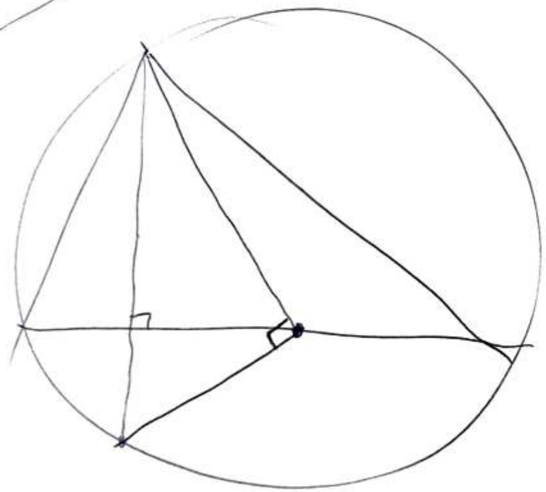
$$\frac{a^2+y^2}{y}=\frac{a^2+(x+y)^2}{x+y}$$

$$\frac{a^2}{y}-\frac{a^2}{x+y}=x+y-y$$

$$\frac{(x+y)a^2-y\,a^2}{(x+y)y}=x$$

$$a^2=(x+y)y$$

$$a=\sqrt{(x+y)y}$$



Черновик №14

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

19 ~~23~~
~~38~~ 46
57 69
76 ~~92~~
95

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots = 3$$

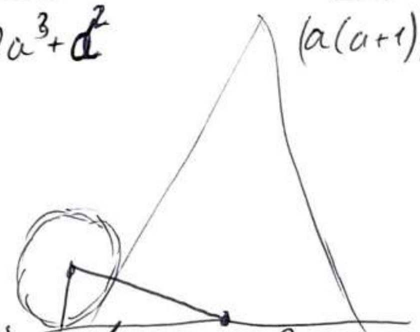
$$\frac{3}{a^2} + \frac{5}{6^2}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2} = \frac{a}{a^2b^2} + \frac{b}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{a+(a+1)}{(a(a+1))^2} = \frac{2a+1}{a^4+2a^3+a^2}$$

$$\frac{1}{(a(a+1))^2} = \frac{1}{a+1}$$



$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$$

$$\frac{2a+1}{(a(a+1))^2} = \frac{2(a+1)-1}{(a(a+1))^2} = \frac{2}{a^2(a+1)} - \frac{1}{a^2(a+1)^2}$$

$$ff(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-1+\frac{1}{x^7}}} = x$$

$$\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2-(a+1)^2}{a^2}$$

9238

~~469 238~~
469 5

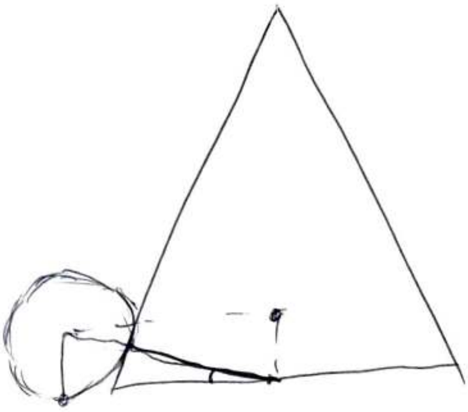
$\underbrace{469576}$9576

$$ff(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1^7}{x^7}} =$$

$$\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

Черновик №13



$$at^3+(2a^2-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$$

$$t^3-\left(\frac{2}{a}+1-2a\right)t^2+\left(\frac{2}{a}-4-2a\right)(-4)=0$$

$$\left(t-\frac{2}{a}\right)(t-1)(t+2a)=0$$

$$tg' = \frac{1}{\cos^2}$$

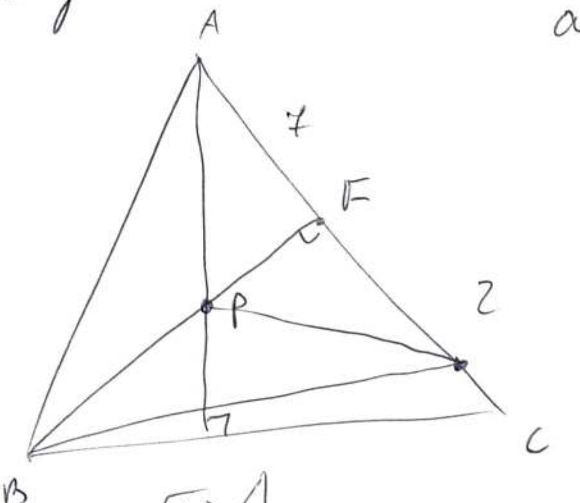
$$tg\, arctg = x$$

$$\frac{1}{\cos^2 arctg}\cdot arctg' = 1$$

$$(at-2)(t-1)(t-2a)=0$$

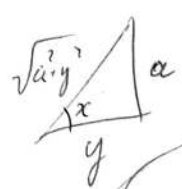
$$arctg' = \cos^2 arctg = \left(\frac{\sqrt{a^2+y^2}}{y}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2+y^2} =$$

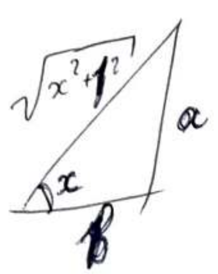
$$= \frac{1}{x^2+1}$$



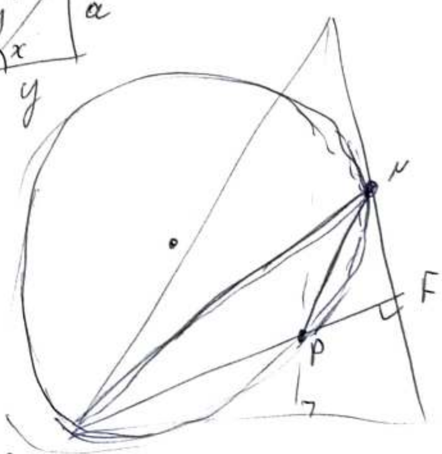
$$\frac{1}{xy} - \frac{x+y}{y^2+(x+y)}$$

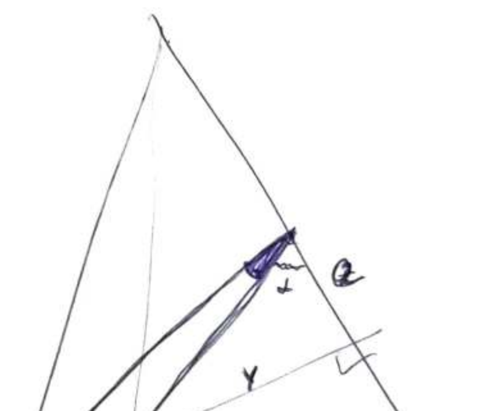
$$arctg\,\frac{a}{y} - arctg\,\frac{a}{x+y} = f(a)$$





$$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{\frac{y^2\sin\alpha}{(x+y)^2}} = 2\alpha$$





$$-2t^2+2t=0$$

$$-2t(t-1)=0$$

$$\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}+1} - \frac{1}{\frac{a^2}{(x+y)^2}+1} = f(a)$$

$$\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a^2}{y^2}+1 = \frac{a^2}{(x+y)^2}+1$$

$$\frac{a^2}{y^2} = \frac{a^2}{(x+y)^2}$$

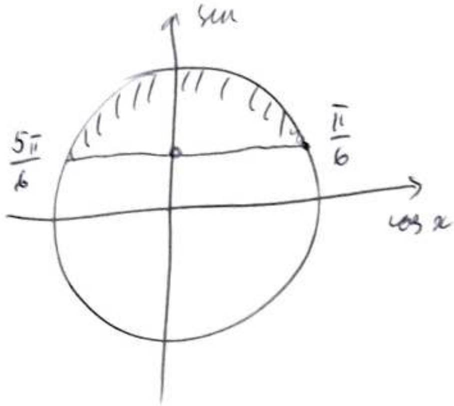
5/6 14/6

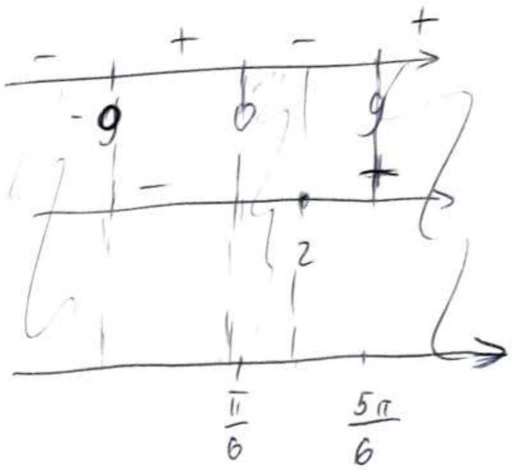
23

Черновик № 12

$t(t-9)(t+9)$

$t-2$





$[-9; 0]$

$[2; 9]$

$-\frac{19\pi}{6} \vee -9$ $\quad -\frac{11\pi}{6} \vee -9$ $\quad < 17 \cdot 3{,}15$

$\frac{19\pi}{6}$ $\quad 9 \vee \frac{11\pi}{6}$

и 9 $\quad 9 \cdot 6$

$9 \cdot 6 < 19 \cdot \pi$

$19 \cdot \pi > 18 \cdot 3 > 9 \cdot 6$ $\quad \frac{17\pi}{6} \vee 9$

$\frac{5\pi}{6}$ $\quad \frac{13\pi}{6}$ $\quad 17 \cdot \pi \vee 9 \cdot 6$

$13 \cdot 3 >$ $\quad \frac{17\pi}{6}$ $\quad > 17 \cdot 3{,}1$

$54 \mid 17$, $-51 \mid 3$ $\quad 3\frac{3}{17}$ $\quad 17 \cdot 3{,}1$ $\quad 9 \cdot 6$

$3{,}15 \times 17$: 2205, 315, 5355

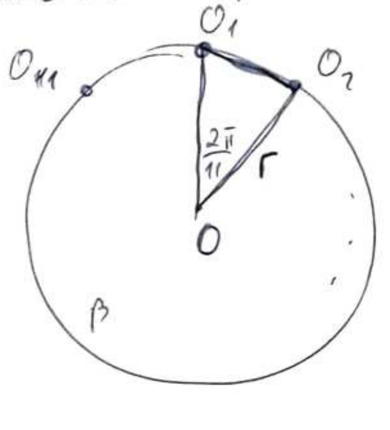
$17 \times 3{,}2$: 34, 51, $54{,}4$

Черновик №11

Чистовик №9

Задача №4

Проведем через центр одной из сфер плоскость $\beta \parallel$ плоскости основания конуса α. Т.к. все центры равноудалены от плоскости α на r, то все центры сфер лежат в этой плоскости β. Очевидно, в силу симметрии системы относительно вращения вокруг оси конуса, что все центры сфер будут образовывать правильный 11-угольник. Причем расстояние между 2 соседними вершинами, т.е. расстояние между центрами равно сумме радиусов 2 касающихся сфер, т.е. сторона многоугольника равна $3 \cdot 2 = 6$.

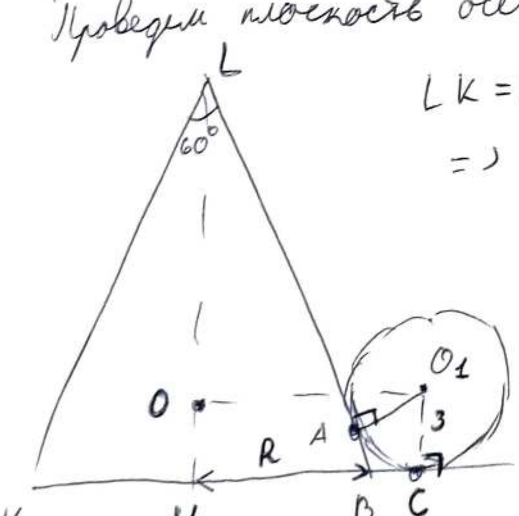


$\angle O_1OO_2 = 2\pi : 11 = \frac{2\pi}{11}$

$O_1O_2^2 = 2r^2(1-\cos\angle O_1OO_2)$

$$r = O_1O_2\sqrt{\frac{1}{2(1-\cos\frac{2\pi}{11})}} = 6\sqrt{\frac{1}{2(1-\cos(\frac{2\pi}{11}))}} = \frac{6}{\sqrt{2(1-\cos(\frac{2\pi}{11}))}}$$

Проведем плоскость осевую через центр любой сферы



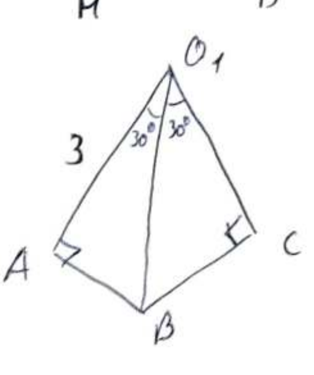
$LK = LB$, т.к это конус $\Rightarrow \angle LBK = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle AO_1C = 60^\circ$

$\angle AO_1B = \angle BO_1C = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AO_1 \cdot tg\,30^\circ = 3 \cdot tg\,30^\circ = \sqrt{3} = BC.$

$OO_1 = r = HC = HB + BC = R + \sqrt{3}$



$$R = r - \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi}{11})}} - \sqrt{3}$$

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi}{11})}} - \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6} < 1 < 2 < \frac{15}{6} < \frac{5\cdot\pi}{6}$

$17\cdot\pi < 17\cdot 3{,}15 = 53{,}55 < 54 = 6\cdot 9 \Rightarrow \frac{17\pi}{6} < 9$

$25\pi > 18\cdot 3 = 9\cdot 6 \Rightarrow \frac{25\pi}{6} > 9$

Итого:

$t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

6 случ) $t = -9$

$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ среднее из a, b, c не может быть > 0

7 случ) $t = 0$

$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ среднее из a, b, c не может быть > 0

8 случ) $t = 2$

$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ среднее из a, b, c не может быть > 0

9 случ) $t = 9$

$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b > 0 \\ t \in \left(\frac{17\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}\right) \Rightarrow c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ среднее из a, b, c $= a = 0.$

см. 5 случ

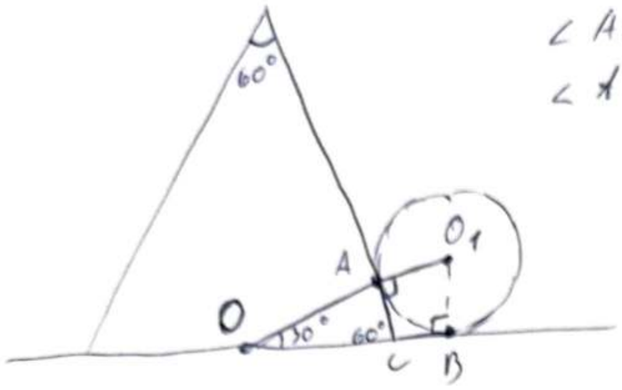
Объединяя решения всех случаев. Получаем

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; \infty)$

~~Чистовик~~

Задача №4

Проведем осевое сечение, проходящее через центр одной из сфер.



$\angle ACB = 120°$

$\angle AO_1B = 180° - \angle ACB = 60°.$

Черновик №10

Чистовик №7

3 случ) $t > 9$

$$\left.\begin{aligned} &a(t) = t(t-9)(t+9) > 0 \\ &b(t) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{среднее из } a, b, c \text{ точно} > 0.$$

4 случ) $t \in (-9; 0)$

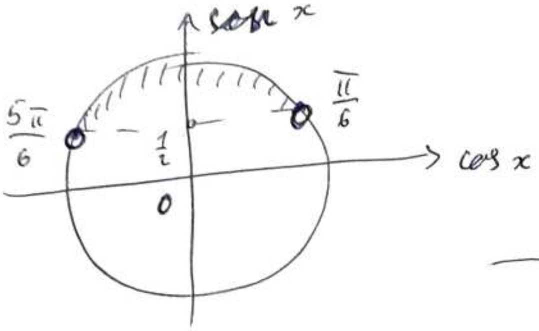
$a(t) > 0$

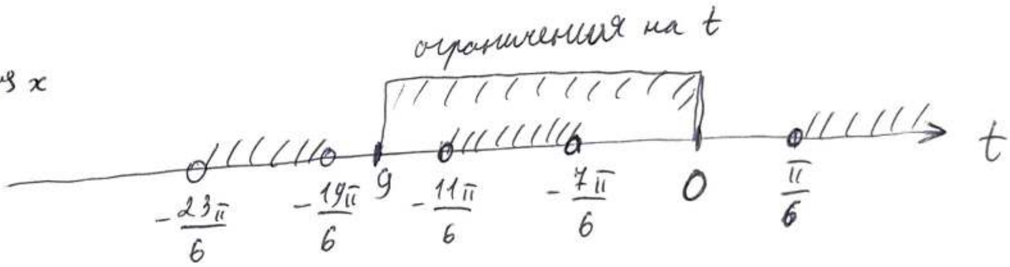
$b(t) < 0$

Если мы хотим, чтобы среднее из a, b, c было > 0 необходимо и достаточно, чтобы $c(t) > 0$.

$c(t) = \sin t - \frac{1}{2} > 0$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$





$19\pi > 18 \cdot 3 = 9 \cdot 6 \Rightarrow \frac{19\pi}{6} > 9 \Rightarrow -\frac{19\pi}{6} < -9$

$9 \cdot 6 > 44 > 11 \cdot \pi \Rightarrow \frac{11\pi}{6} < 9 \Rightarrow -\frac{11\pi}{6} > -9$

$$\boxed{t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)}$$

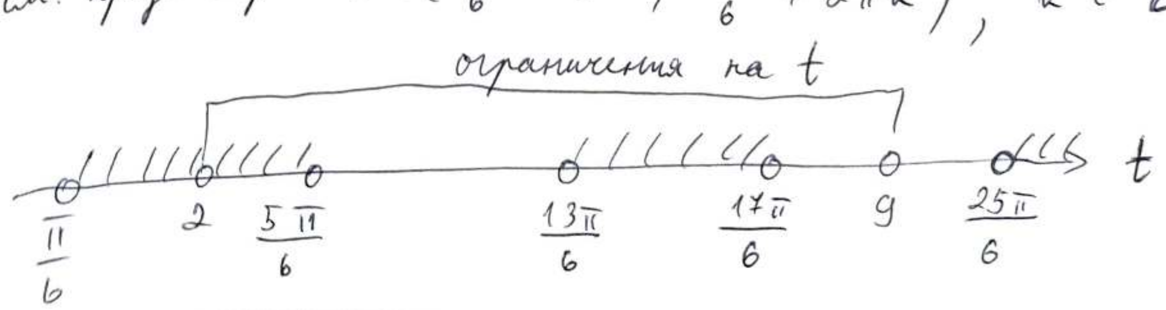
5 случ) $t \in (2; 9)$

$a < 0$

$b > 0$

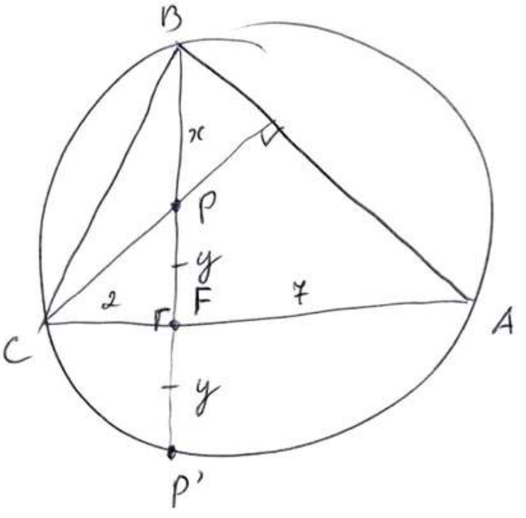
Если мы хотим, чтобы среднее из a, b, c было > 0 необходимо и достаточно, чтобы $c(t) > 0$

см. пред. случ $t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$



Чистовик № 6

Теперь найдем $a = \sqrt{y(x+y)}$ и докажем, что при таком значении a $N \in [AC]$.



Отразим P отн. CA. Получим точку P'. Как известно, P' лежит на окружности ABC. $PF = FP' = y$.

По свойству пересекающихся хорд:

$$CF \cdot FA = BF \cdot FP' = (x+y)\cdot y$$
$$\parallel$$
$$7 \cdot 2$$
$$\parallel$$
$$14$$

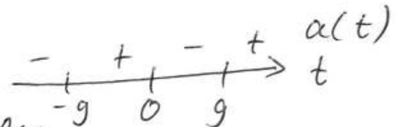
Итого $(x+y)y = 14 = a^2 \overset{a \geq 0}{\Rightarrow} a = \sqrt{14} < 7 \Rightarrow N \in [AC]$.

$a = NF = \sqrt{14}$

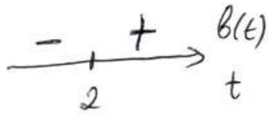
Ответ: $FN = \sqrt{14}$

Задача № 5

$a(t) = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$



$b(t) = 11^t - 121$



$c(t) = \sin t - \frac{1}{2}$

1 случ) $t < -9$.

$$\left.\begin{array}{l} a(t) = t(t-9)(t+9) < 0 \\ b(t) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ среднее из a, b, c не может быть > 0

2 случ) $t \in (0; 2)$

$$\left.\begin{array}{l} a(t) = t(t-9)(t+9) < 0 \\ b(t) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ среднее из a, b, c не может быть > 0

Чистовик №5

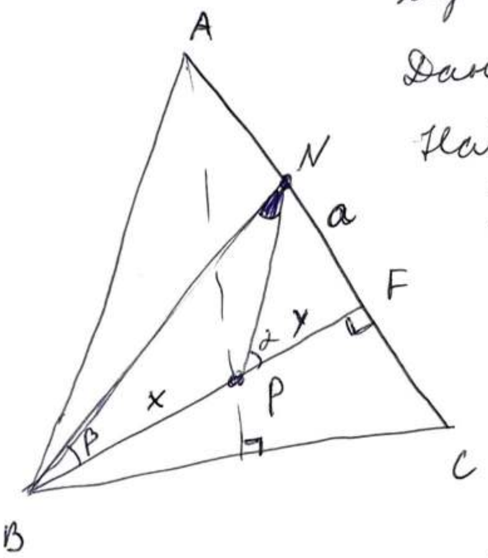
В I случае наибольшее расстояние между корнями $= \frac{\pi}{4}$

Во II случае наибольшее расстояние между корнями $> \frac{\pi}{4}$

Значит наименьшее значение наибольшего расстояния между корнями равно $\frac{\pi}{4}$ и достигается оно при $a = 0$

Ответ: При $a = 0$ и равно $\frac{\pi}{4}$

Задача №7



Дано: $AF = 7$, $FC = 2$, $\angle BNP$ наибольший

Найти: NF

Пусть $BP = x$, $PF = y$, $NF = a \geq 0$

$$\angle BNP = \alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{a}{y} - \operatorname{arctg}\frac{a}{x+y} = F(a)$$

$$\frac{d}{da}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{y} - \operatorname{arctg}\frac{a}{x+y}\right) =$$

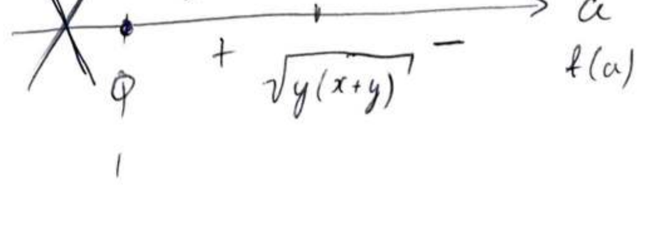
$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}+1} - \frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{(x+y)^2}+1} = f(a)$$

$$f(a) = 0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{1}{x+y}\cdot\frac{(x+y)^2}{a^2+(x+y)^2}$$

$$\frac{a^2}{y} + y = \frac{a^2}{x+y} + x + y$$

$$\frac{xa^2}{y(x+y)} = x \overset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{y(x+y)}$$



Итого $a = \sqrt{y(x+y)}$ точка максимума $F(a) = \angle BNP$. Значит (в силу непрерывности $F(a)$) в этой точке достигается наибольший угол $\angle BNP$.

Задача №6 Чистовик №4

$ctg x = t$

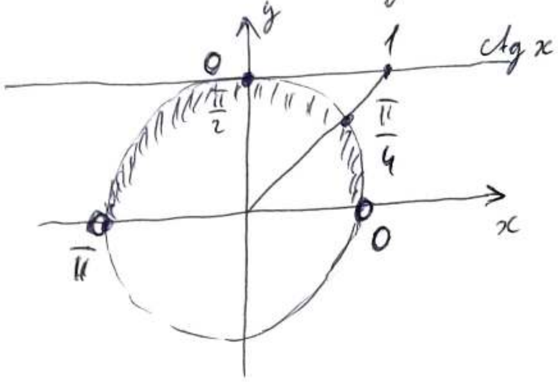
$a t^3 + (2a^2 - a - 2) t^2 + (2 - 4a - 2a^2) t + 4a = 0$

$(a t - 2)(t - 1)(t + 2a) = 0$

1 случ) $a = 0$

$-2(t-1)t = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} ctg x = 1 \\ ctg x = 0 \end{array}\right.$ $\xrightarrow[\text{задачи } x \in (0;\pi)]{\text{с учетом ограничений}}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$



Наибольшее расстояние между корнями: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

2 случ) $a \neq 0$

$(t - \frac{2}{a})(t-1)(t+2a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{2}{a} \\ t = -2a \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} ctg x = 1 \\ ctg x = \frac{2}{a} \\ ctg x = -2a \end{array}\right.$ $\xrightarrow[\text{задачи } x \in (0;\pi)]{\text{с учетом ограничений}}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = arcctg \frac{2}{a} \\ x = arcctg -2a \end{array}\right.$

При любом $a \neq 0$ $\frac{2}{a}$ и $-2a$ имеют разные знаки, значит одно из чисел $arcctg \frac{2}{a}$ или $arcctg -2a$ больше $\frac{\pi}{2}$, а другое - меньше, чем $\frac{\pi}{2}$. Заметим, что расстояние между $x = \frac{\pi}{4}$ и числом среди $arcctg \frac{2}{a}$ и $arcctg -2a$, которое больше чем $\frac{\pi}{2}$ будет больше, чем $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. А наибольшее из всех расстояний между корнями не может быть меньше расстояния между какими-то 2. Значит наибольшее расстояние между корнями ~~[illegible]~~ больше, чем $\frac{\pi}{4}$

Чистовик №3

Задача №3

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{1-x^7-1}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}\right) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}\right)^7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-1+\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = x$$

Итого $f(f(f(x))) = x$. Значит:

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{1304\text{ раза}}(x))\ldots) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{1301\text{ раз}}x)))\ldots) = \ldots = \underbrace{f(\ldots f}_{5\text{ раз}}(x)\ldots) =$$

$$\boxed{1304 \underset{3}{\equiv} 2}$$

$$= f(f(x))$$

Значит $\underbrace{f(f(\ldots f}_{1304\text{ раза}}(2022))\ldots) = f(f(2022)) = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Чистовик № 2

1 случ) После 9 идет 2. 4692...

После 2 может идти только 3. 46923...

После 3 может идти только 8. 469238...

Но мы уже отметили, что после 8 не может идти цифр. Значит это последняя цифра. Но тогда у нас всего 6 знаков у числа, а должно быть 2021.

2 случ) После 9 идет 5. 4695...

После 5 может идти только 7. 46957...

После 7 может идти только 6. $4\underbrace{6957}6...$

Заметим, что мы опять встретили 6. Значит все последующие рассуждения будут аналогичны предыдущим. Тогда, продолжая рассуждения мы получим число вида

$4\underbrace{6957}\underbrace{6957}...\underbrace{6957}...$ (число может иметь неполное кол-во блоков $\underbrace{6957}$)

или

$4\underbrace{6957}\underbrace{6957}...\underbrace{6957}\underbrace{69238}$ (число может иметь неполный блок $\underbrace{69238}$)

В I случае мы получаем, что число имеет вид

$4\underbrace{\underbrace{6957}...\underbrace{6957}}_{k\ раз}$ где $k = \frac{2021-1}{4} = 505$

Итого $505 \cdot 4 + 1 = 2021$ знак

Последняя цифра - 7.

Во II случае мы получаем, что число имеет вид.

$4\underbrace{\underbrace{6957}...\underbrace{6957}}_{k-1\ раз}\underbrace{6923}$ где $k = 505$

итого $504 \cdot 4 + 4 + 1 = 2021$ знак

Последняя цифра - 3.

Ответ: 7 или 3.

Чистовик №1

Задача №1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{3+1-2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{4^2-(2\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$B=\sum_{n=1}^{59}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=\sum_{n=1}^{59}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{59^2}-\frac{1}{60^2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{60^2}<1=A$$

Ответ: число A больше

Задача №2

Посмотрим, какими могут быть двузначные числа из 2 соседних цифр числа в том же порядке:

19, 38 (2·19), 57 (3·19), 76 (4·19), 95 (5·19), ~~[illegible]~~

23, 46 (2·23), 69 (3·23), 92 (4·23).

$19\cdot 6>100$
$5\cdot 23>100$

Заметим, что среди этих чисел нет начинающихся на 8. Значит, если в изначальном числе встретилось 8, то после него не может быть цифр. Иначе число $\ldots\overline{8\_}$ не делится ни на 23, ни на 19. Значит 38 может быть только в конце числа.

Рассмотрим несколько первых цифр нашего числа.

После 4 может идти только 6 46…

После 6 может идти только 9 469…

После 9 может идти или 2, или 5 4692… или 4695…