



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Финоченко Александр
Викторович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	15	15	15

Умножим: 1

$$1) A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= 1.$$

$$B = \frac{2+1}{1^2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{79}{39^2 \cdot 40^2}$$

Разложим общее выражение:

$$\frac{\cancel{k^2+2k+k+1}}{\cancel{k+1}} \cdot \frac{k+k+1}{(k+1)^2 \cdot k^2} = \frac{k^2+2k+1-k^2}{(k+1)^2 \cdot k^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда В упрощаем так:

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{40^2} < 1 >$$

$$\Rightarrow A > B$$

Числовый ряд

$$x_2 \dots x_{2021} \in \mathbb{N}$$

$$x_i x_{i+1} = 19 \text{ или } 23$$

Рассмотрим возможные двузначные числа:

- | | |
|-----------|-----------|
| 19: 1) 19 | 23: 1) 23 |
| 2) 38 | 2) 46 |
| 3) 57 | 3) 69 |
| 4) 76 | 4) 92 |
| 5) 95 | |

Получим, что x_2 может быть равен только 6. $x_2 = 6 \rightarrow x_3 = 9$.

Получаем цепь:

46 → 69 → 92 → 23 → 38 → нет числа
↙
95 → 57 → 76 → 69 → оканчивается.

Получаем цепь: 69 → 95 → 57 → 76 → 69

4.

Из числа будет выделено:

4. 695 76 95 76 95 7
 4 4 4

695(?)
или
692(3)

В конце этого числа будет цифра (7), или (3).

Ответ: 7 или 3

Umemoben. 3

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-x^2-1}{1-x}}} = -\frac{\sqrt{1-x}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-x^2-1}{1-x}}} = x$$

~~$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x)$$~~

$$f(f(f(x))) = x.$$

Thora $f(f(f(\dots f(x)))) = f(f(\dots f(x))) = f(x).$

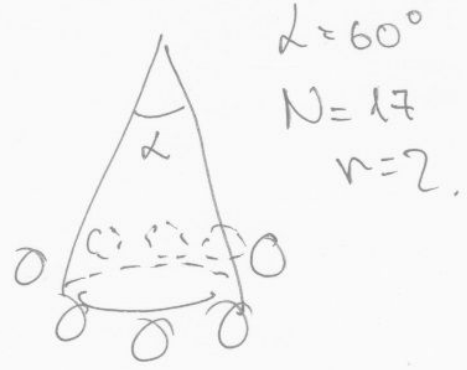
1306 1306-3k

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt{1-2022}}$$

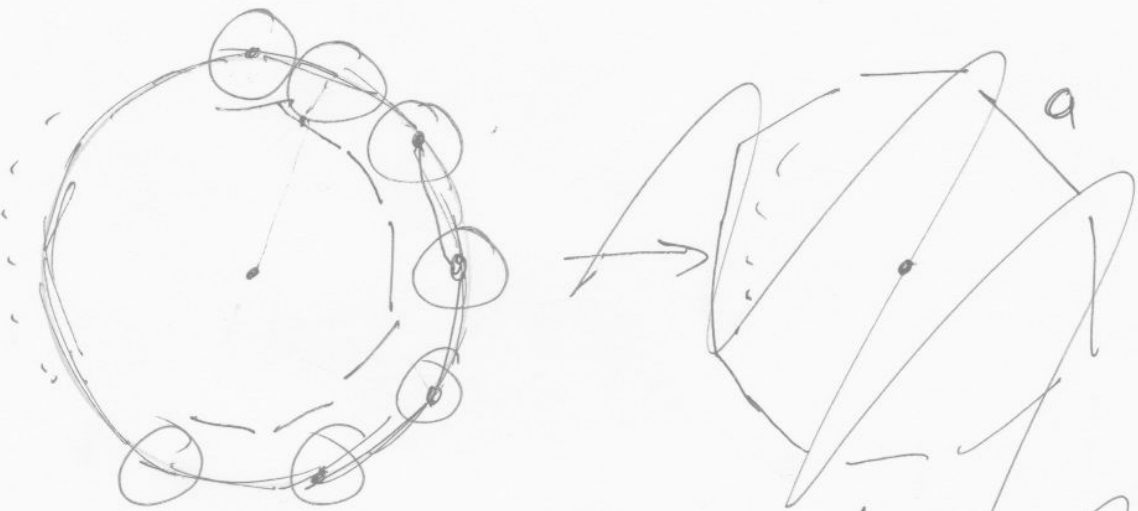
$$1306 = 435 \cdot 3 + 1$$

Ombem: $f(2022) = \frac{1}{\sqrt{1-2022}}$

4) Уменьшим 4



Вид сверху:

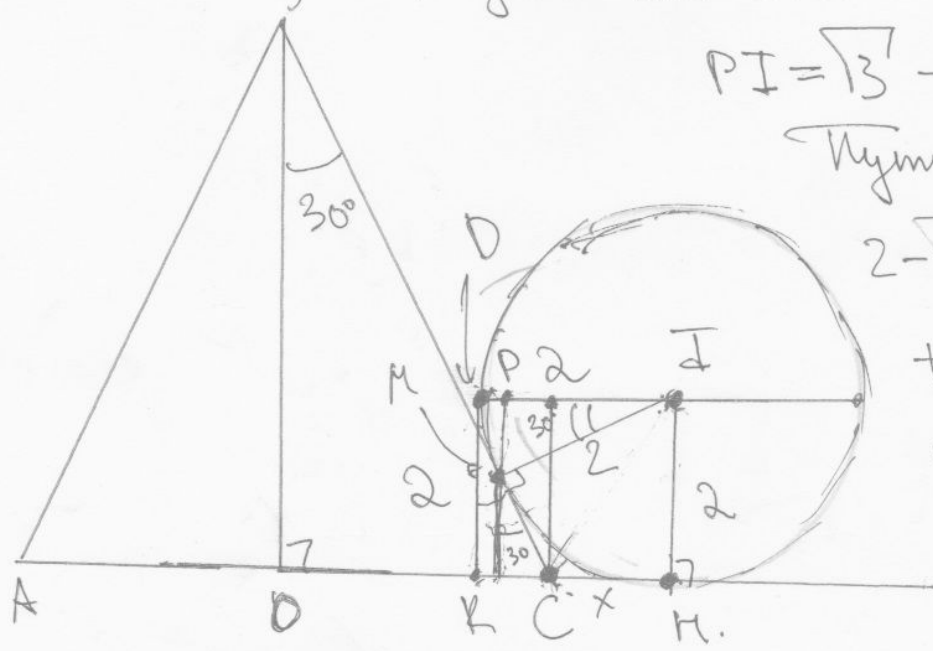


Если смотреть сверху шарик
 "впадают" в конус

17-я уловочка.
 со стороны стороны
 $a = 2r = 4$

Вид сбоку:

Найдите CH.



$PI = \sqrt{3} \rightarrow DP = 2\sqrt{3}$

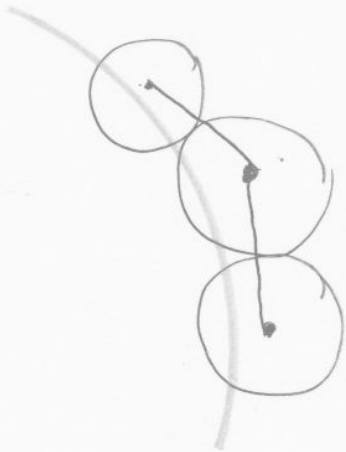
Пусть $CH = MC = x$

$2\sqrt{3} = x + \frac{1}{2}x \sqrt{3}$

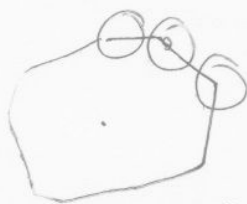
$+ x \cdot \sin 30^\circ =$

$= \frac{3}{2}x \Rightarrow x = \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

4 нүрсе) ^{нөмбөр 5} ~~мөргө~~ $R = R$ 17-нүрсе



Кайрадан пады. 17-нүрсе,
 көпү беринер n көпү -
 үзүмү маане $a=4$.



Кайрадан n Ромбонун $\rightarrow R$ \triangle R $d = \frac{360}{17} = \frac{2\pi}{17}$
 A_i 4 A_j

Том, көсүрүб:

$$16 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \frac{2\pi}{17} \Rightarrow$$

$$2(1 - \cos \frac{2\pi}{17}) \cdot R^2 = 16$$

$$4 \left(\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{17}}{2} \right) R^2 = 16$$

$$\sin \left(\frac{2\pi}{17} \right) \cdot R^2 = 4 \Rightarrow R = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{17}}$$

$$R_0 = R - CH = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{17}} - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} =$$

$$\frac{2}{\sin \frac{\pi}{17}} - \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3}$$

Минимум. 6

5) Разложим, когда числа положительные:

$$a = t^3 - 81t > 0 \rightarrow \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -9 \quad 0 \quad 9 \quad t \end{array} \rightarrow t \in (9; 0) \cup (9; \infty).$$

$$b = 11^t - 121 > 0 \Rightarrow t > 2$$

$$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \begin{array}{c} \frac{5\pi}{6} \\ \uparrow \\ c \\ \downarrow \\ \frac{\pi}{6} \end{array} \rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right)$$

Тип $t > 9$ и $a \cup b > 0 \Rightarrow$

\Rightarrow скорость > 0 . $\rightarrow t > 9$.

Тип $t = 9$ $a = 0$ $b > 0$ $c = \sin 9 - \frac{1}{2}$

$$9 < 3\pi \quad 9 \vee \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} = \frac{17 \cdot 3,14}{6} \approx \frac{52,7}{6}$$

↓

$$54 > 52,7$$

↓

$2\pi + \frac{5\pi}{6} < 9 < 3\pi \rightarrow c < 0 \rightarrow$ не подходит

и.к. $a = 0$ -
- скорость.

5 урока) Умножен. 7

Тип $0 \leq t < \pi$ $\rightarrow a < 0 \quad b \geq 0$

тип $t \in \left[\frac{17\pi}{6}; \pi \right) \rightarrow c \leq 0$ ~~не~~ не подходит.

тип $t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{13\pi}{6} \right) \rightarrow c > 0 \rightarrow$ подходит.

тип $t \in \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi \right] \rightarrow c \leq 0$ - не подходит.

тип $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6} \right) \rightarrow c > 0$ - подходит.

$c > 2$ ~~и~~ $t = 2 \rightarrow b = 0 \quad a < 0$ - не подходит.

Тип $\pi < t < 2\pi$ $0 \leq t < 2\pi \rightarrow a \leq 0 \quad b < 0 \rightarrow$ не подходит.

Тип $-\pi < t < 0 \rightarrow a > 0 \quad b < 0$

тип $t \in \left[\frac{5\pi}{6} - 2\pi; 0 \right) \rightarrow c \leq 0 \rightarrow$ не подходит.

тип $t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi \right) \rightarrow c > 0 \rightarrow$ подходит.

тип $t \in \left(-\pi; \frac{\pi}{6} - 2\pi \right] \rightarrow c \leq 0$ - не подходит.

тип $t \leq -\pi \rightarrow a \leq 0 \quad b < 0 \rightarrow$ не подходит.

Получаем: $t > \pi$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi \right).$

$t \in \left(2; \frac{5\pi}{6} \right)$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi \right)$

Ответ

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi \right)$

Умножим. 8

$$6) a \operatorname{tg}^3 x + (2 - a - a^2) \operatorname{tg}^2 x + (a^2 - 2a - 2) \operatorname{tg} x + 2a = 0.$$

Заметим, что $\operatorname{tg} x = 1$ всегда возможно.

$$a + 2 - a - a^2 + a^2 - 2a - 2 + 2a = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x = y$

$$\begin{array}{r} ay^3 + (2 - a - a^2)y^2 + (a^2 - 2a - 2)y + 2a \\ - ay^3 - ay^2 \\ \hline (2 - a^2)y^2 + (a^2 - 2a - 2)y + 2a \\ - (2 - a^2)y^2 - (2a^2)y \\ \hline 2a^2 - 2a \end{array} \quad \begin{array}{l} | y - 1 \\ \hline ay^2 + (2 - a)y \end{array}$$

$$ay^3 - ay^2 + (2 - a^2)y^2 - (2 - a^2)y - 2ay + 2a = 0.$$

$$(y - 1)(ay^2 + (2 - a^2)y - 2a) = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + (2 - a^2) \operatorname{tg} x - 2a = 0$$

$$D = 4 - 4a^2 + a^4 + 8a^2 = (a^2 + 2)^2$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 + a^2 \pm (a^2 + 2)}{2a} \rightarrow \begin{array}{l} a \\ -\frac{2}{a} \end{array}$$

Умножим. 9

6) тогда)

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - a)(\operatorname{tg} x + \frac{2}{a}) = 0.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = a \\ \operatorname{tg} x = -\frac{2}{a} \end{cases}$$

Тип $a = 0$: ~~$\operatorname{tg} x = \frac{2}{0}$ не существует~~

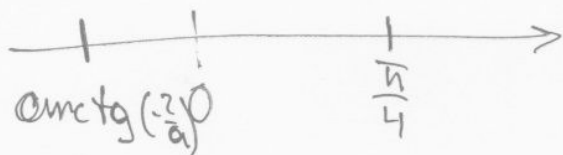
$$2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \text{ или } 0. \Rightarrow d = \frac{\pi}{4}.$$

Тип $a > 0$ получаем.

d - расстояние между корнями.

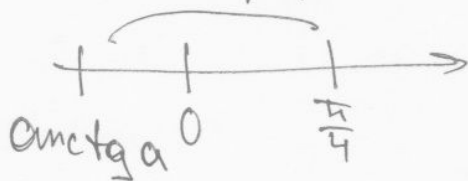
$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{a} < 0 \text{ и } \operatorname{tg} x = a > 0. \operatorname{tg} x = \frac{2}{a} > 0$$

Расстояние между корнями ~~$\operatorname{tg} x = \frac{2}{a}$~~ $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \arctan(-\frac{2}{a})$; всегда $> \frac{\pi}{4}$. не подходит.



Тип $a < 0$ получаем $x = \arctan a$ $x = \frac{\pi}{4}$ $x = \arctan(-\frac{2}{a})$

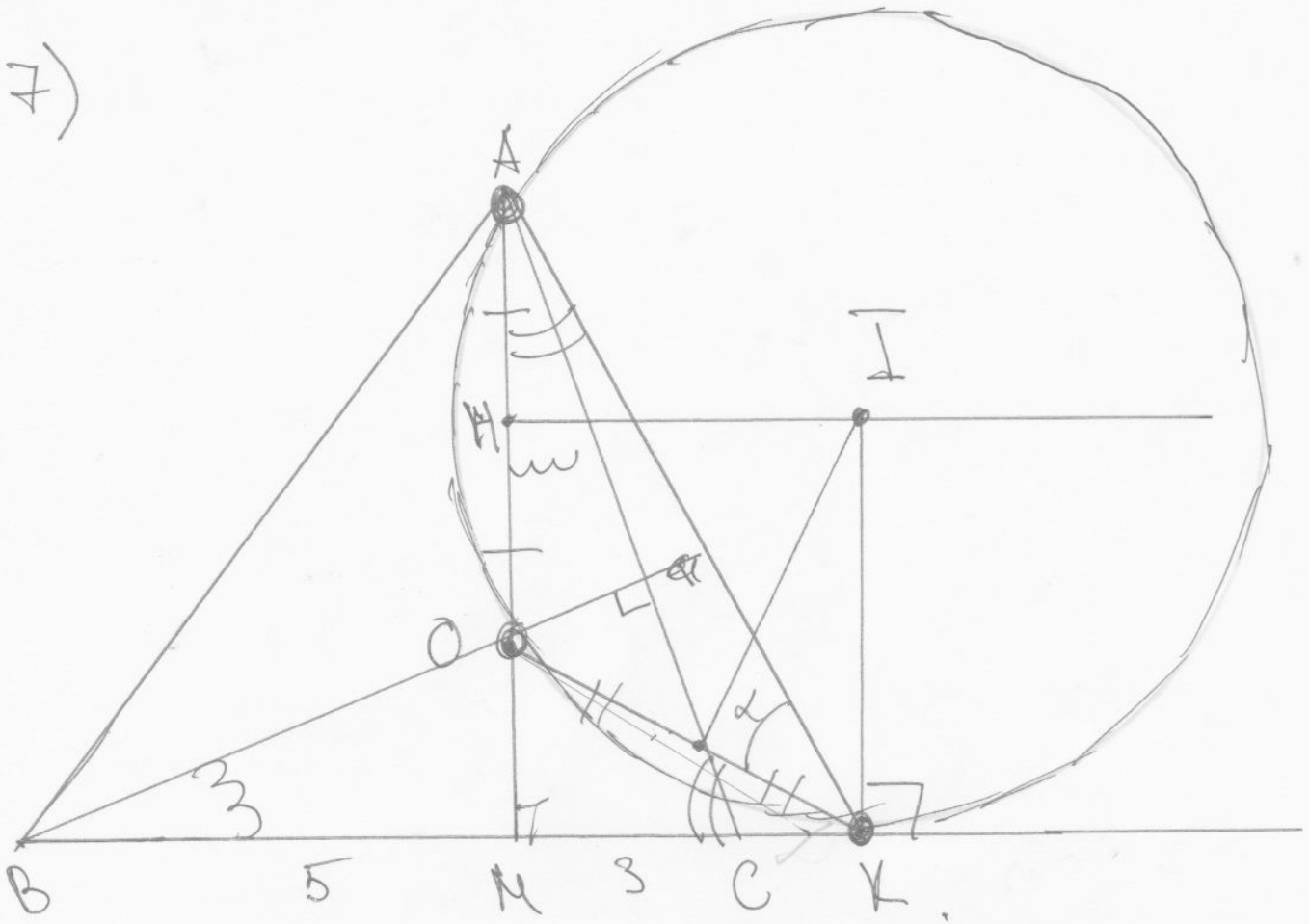
Расстояние между $x = \arctan a$ и $x = \frac{\pi}{4}$ может $> \frac{\pi}{4}$



Тогда получаем, что подходит $a = 0$ $d = \frac{\pi}{4}$.

Умножен. 10

7)



то м. центров $\triangle AOK$:

$$\frac{AO}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AO}{2R}. \text{ Тогда, если } \alpha \rightarrow \max,$$

то $\sin \alpha \rightarrow \max$ и $R \rightarrow \min$.

Проведем ~~HI~~ ~~AK~~ $\neq AM$ $HI \perp AO$ ($AH = HO$).

Тогда R минимальна, когда центр окружности $\triangle AOK$

Тогда R мин, когда $IK \perp BC$ и $IK \perp HI$.

I' - центр окружности, описанной около $\triangle AOK$.

Тогда в этой ситуации $\angle AOK = \angle OKM$,

по св-ву ~~OK~~ угла между хордой и касательной
и внутр. углом. BK - кас. OK - хорда.

Учебник 11

7 задача). Тогда $\triangle AMK \sim \triangle OKM \Rightarrow$

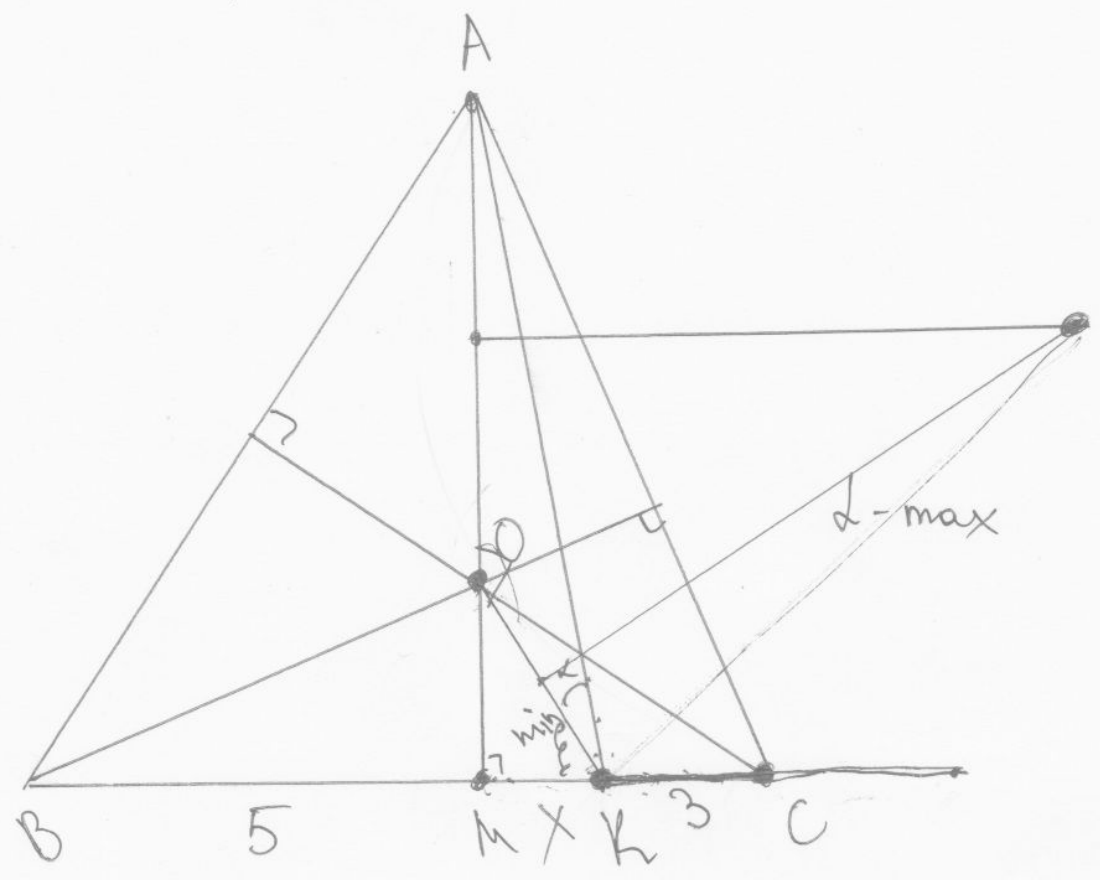
$$\Rightarrow \frac{MK}{AM} = \frac{OM}{MK} \Rightarrow \underline{MK = \sqrt{AM \cdot OM}}$$

$\angle OBM = \angle MAC = 90^\circ - \angle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle BOM$ - прямоугол. \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{OM}{5} = \frac{3}{AM} \Rightarrow AM \cdot OM = 15 \rightarrow \underline{MK = \sqrt{15}}$$

Упробер. 1

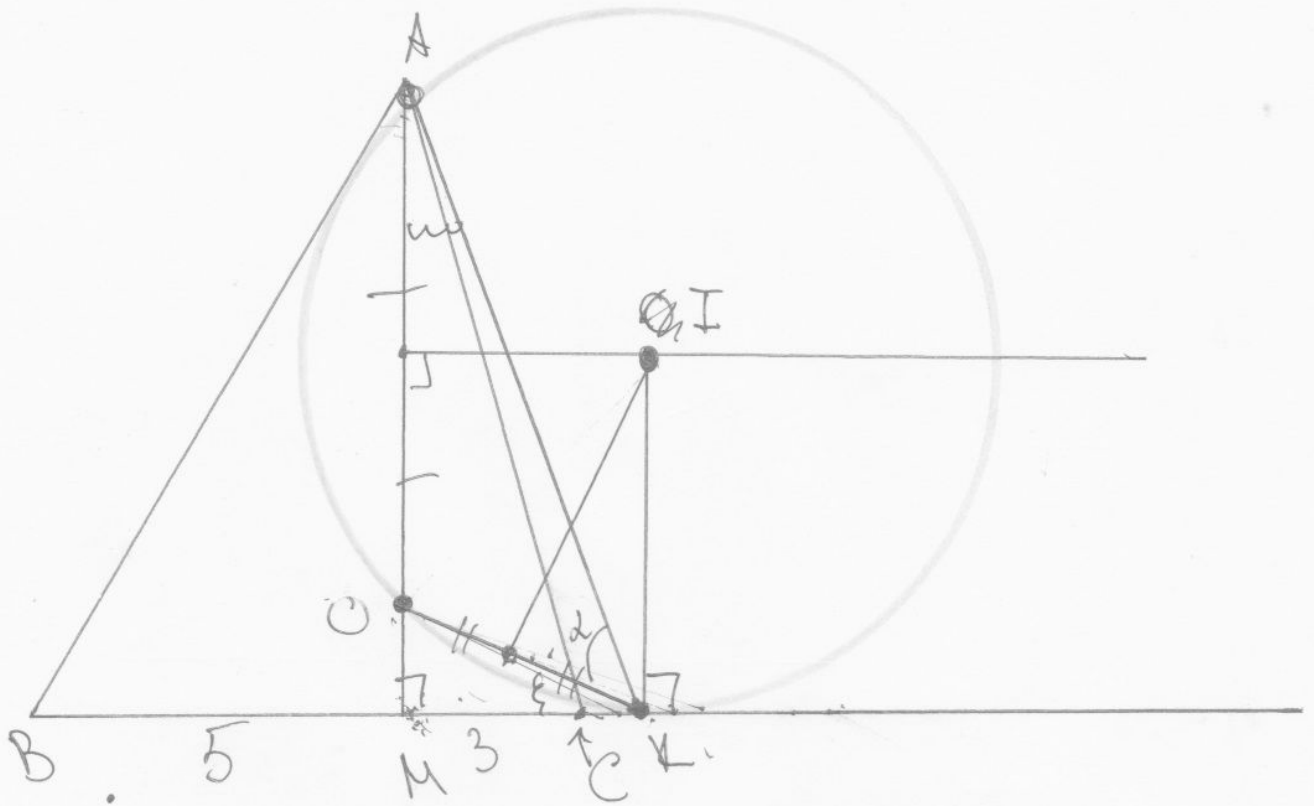


$$\frac{AO}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AO}{2R} \Rightarrow \alpha \rightarrow \max \Rightarrow R \rightarrow \min$$

AK-D.

m

Черновик. 2



~~$\triangle MKA \sim \triangle AMK$:~~

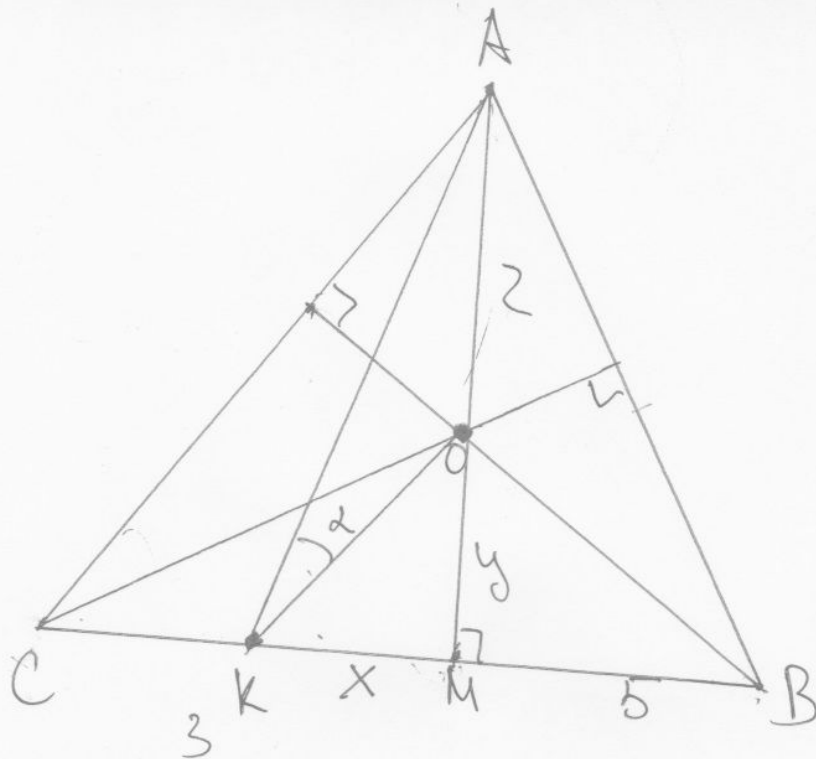
~~$\frac{AM}{3} = \frac{3}{MK} \Rightarrow AM \cdot MK = 9!$~~

$\triangle MKA \sim \triangle AMK$:

~~$\triangle MKA \sim \triangle AMK$~~ $\frac{MK}{AM} = \frac{OM}{MK} \Rightarrow$

$\Rightarrow MK = \sqrt{AM \cdot OM}$

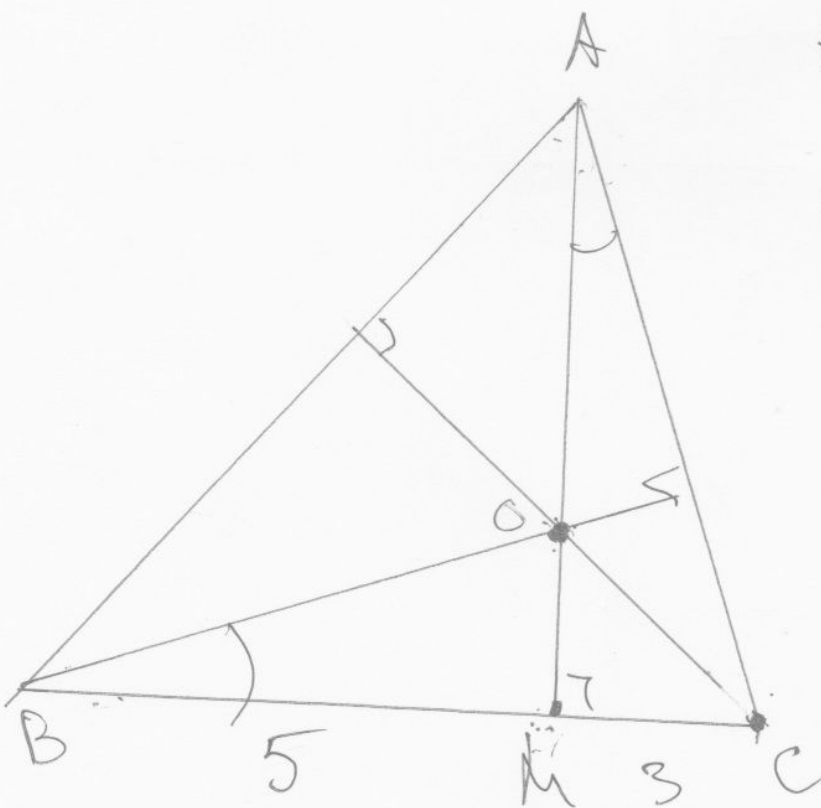
Черновик. 3



МК - ?

BM=5 ME=3.

По т. косинусов: $AO^2 = AK^2 + KO^2 - 2AK \cdot KO \cdot \cos \alpha$



AM · OM - ?

$$\frac{AM}{3} = \frac{5}{OM}$$

Упробук. 4

$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$$

B v 1.

$$B = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{\dots}$$

$$3 = 2+1. \quad 3+2.$$

$$\cancel{B} \rightarrow \frac{1+2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{2+3}{(2 \cdot 3)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{1} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \right) +$$

$$\frac{n+n-1}{(n \cdot (n-1))^2} + \frac{n+n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{1}{n(n-1)^2} + \frac{1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)}$$
$$\frac{n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1}{n(n-1)^2(n+1)^2}$$

Умножен 5

Умножен.

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x-1}{1-x}}} = \frac{\sqrt{1-x^4}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{-x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{1-x^4}}{-x}}}$$

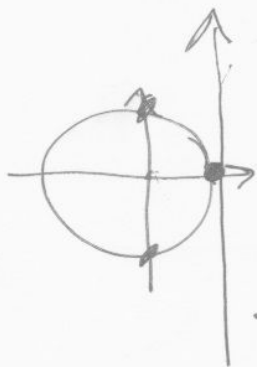
$$= \frac{-\sqrt{\frac{x^4}{1-x^4}}}{-\sqrt{\frac{1}{1-x^4}}} = x$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x).$$

Тогда каждые 3 операции ~~и~~ мы возвращаемся к началу.

$$\underbrace{f(f(f(\dots)))}_{1306 \text{ раз}} = \underbrace{f(\dots)}_{1306 - 3k} = f(x)$$

Упробук. 6



$$\operatorname{tg} = 0$$

$$a = 0.$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{x} - 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

$$\frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{79}{39 \cdot 40}$$

$$\begin{array}{r} 1306 \overline{) 3} \\ \underline{12} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 16 \end{array}$$

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x}} \approx \frac{1}{x \cdot \sqrt{\frac{1}{x} - 1}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x}} \right)}} = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \frac{1}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{x}} \cdot \sqrt[11]{1-x} = \frac{\sqrt[11]{1-x}}{x}$$

$$f(f(f(x))) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \left(\frac{\sqrt[11]{1-x}}{x} \right)}} = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \frac{1-x}{x^{11}}}}$$

=

Упражнение 7

5) abc

~~$a \leq b \leq c$~~

$$t^3 - 81t \leq 11^t - 121$$

$$t \geq 2$$

$$b = 11^t - 121$$

$$b \geq 0 \quad t \geq 2$$

$$a = t^3 - 81t \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \quad | \\ -9 \quad 0 \quad 9 \end{array}$$

$$a \geq 0 \rightarrow t \in [-9; 0] \cup [9; +\infty)$$

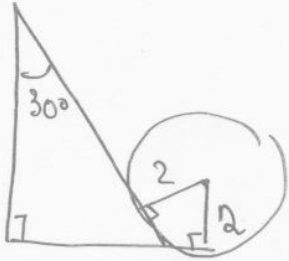
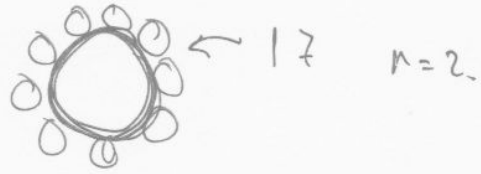
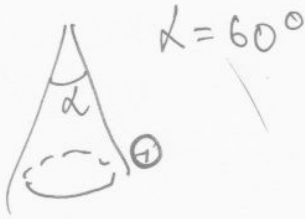
$$c = \sin t - \frac{1}{2}$$

$$c \geq 0 \quad t =$$



Упробува Кенгур 8

4)



2) $x_1, \dots, x_{2021} \in \mathbb{N}$

$x_i \cdot x_{i+1} : 19 \nmid \text{уми} 23.$

$4 \mid x_2, \dots, x_{2021} =$

$4 \rightarrow x_2 = 6$

4

2020

4K

- 19
- 38
- 57
- ~~66~~
- 76
- 95
- 23
- 46
- 69
- ~~82~~ 92

- 1) 19
- 2) 38
- 3) 57
- 4) 76
- 5) 95
- 2) 23

$\frac{38}{19}$
 $\frac{57}{19}$
 $\frac{92}{19}$

$\frac{23}{4}$
 $\frac{92}{4}$

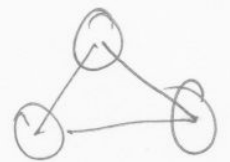
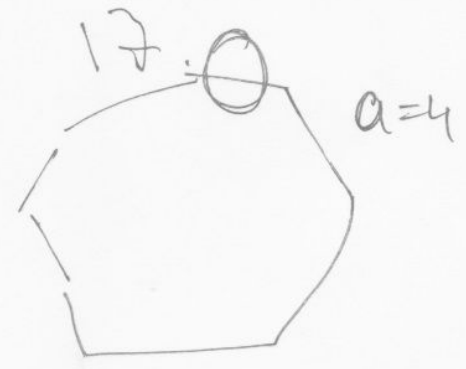
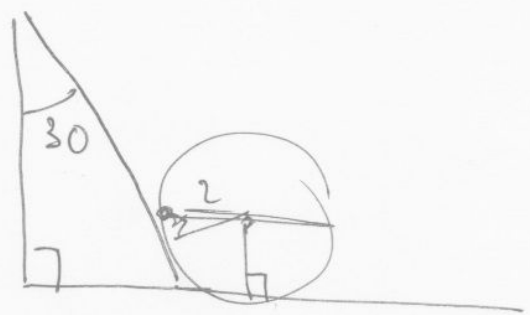
Черновик № 9

1+4к.

69 238.

17 шлицов $r=2$.

69



$R=4$

$$2R = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{17}}$$

§

$$\begin{array}{r|l} 1306 & 3 \\ \hline 12 & 435 \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline & 16 \end{array}$$

Черновик § 10



$$-2\sqrt{n}$$

$$-9 \approx -3\sqrt{n}$$

$$\cancel{-4\sqrt{n}} \quad -4\sqrt{n} + 5\sqrt{n}$$

$$-11$$

$$-12 + 5$$

Число бер. ~~32~~ 11

$$\begin{array}{r|l} 1306 & 3 \\ \hline 12 & 1435 \\ \hline 10 & \\ -9 & \\ \hline 16 & \\ -15 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 435 \\ \hline 1305 \end{array}$$

$$\sqrt[1]{1-2022}$$

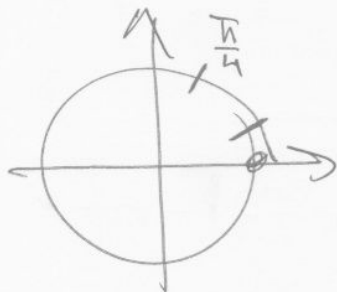
$$ax^2 + (2-a^2)x - 2a = 0$$

$$D = 4 - 4a^2 + a^4 + 8a^2$$

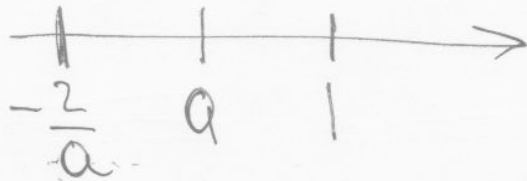
$$\frac{-2 + a^2 + a^2 - 2}{\pi}$$

$$\frac{-2 + a^2 - a^2 + 2 - 4}{a}$$

$$\frac{-2}{a}$$

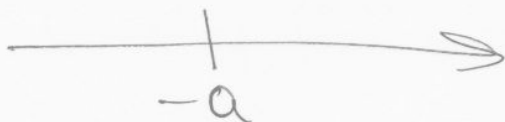


$$a = 0$$



$$a > 0 \quad + \frac{2}{a} + 1.$$

$$a < 0$$



reproducible 12



~~344~~

$\frac{5\pi}{6}$

$$B = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$$

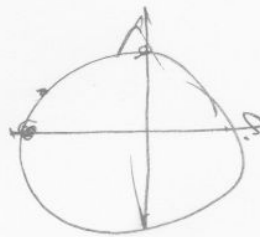
$$\begin{array}{r} 13 \\ 17 \\ \times 31 \\ \hline + 17 \\ 51 \\ \hline 527 \end{array}$$

$$\frac{3}{1.2}$$

~~17~~

$$\frac{2i+3}{(i+1)^2 \cdot (i+2)} = \cancel{1} \frac{1}{(i+1)^2} - \frac{1}{(i+2)^2}$$

$$\frac{k+1+k}{k^2(k+1)^2} = \cancel{2}$$



$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$2\pi + \frac{5\pi}{6} < g < 3\pi \quad \frac{5\pi}{6}$$

$$6,2 \cdot + \frac{5}{6} \cdot 3,14$$

$$\frac{17\pi}{6} \quad \vee \quad g$$

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 17 \\ \hline 53,38 \end{array}$$

$$17\pi \vee 54$$

$$17 \cdot 3 \approx 51 < 54$$

чешное B A=1.

$$B = \sum_0^{40} \frac{3i+2}{(i+1)(i+2)^2}$$

$$\frac{2i+3}{(i+1)(i+2)^2} =$$

$$= \frac{i+1}{(i+1)}$$

$$B = \sum_0^{40} \frac{1}{(i+1)(i+2)^2} + \sum_0^{40} \frac{1}{(i+1)^2(i+2)}$$

$$\frac{A}{i+1} + \frac{B}{i+2} + \frac{C}{(i+2)^2} = \frac{1}{(i+2)^2 \cdot (i+1)}$$

$$(i+2)^2 \cdot (i+1)$$

$$\frac{1}{(i+2)^2 \cdot (i+1)} = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} - \frac{1}{(i+2)^2} =$$

$$= \frac{(i+2)^2 - (i+1)(i+2) - i-1}{(i+2)^2 \cdot (i+1)} =$$

$$= \frac{i^2+4i+4 - i^2-3i-x-i-1}{(i+2)^2 \cdot (i+1)}$$

Упробук. 14

$$a \operatorname{tg}^3 x - a \operatorname{tg}^2 x + (z - a)$$

$$\cancel{a} + \cancel{z} - \cancel{a} - a^2 + a^2 - \cancel{za} - \cancel{z} + \cancel{za}$$