МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хабазина Екатерина Владиславовна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	15	0

Чистовик №5

⑥ $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)\,tg^2x+(2a^2-2a-1)\,tg\,x+2a=0$

Пусть $tg\,x=y$, тогда уравнение примет вид:

$ay^3+(1-a-2a^2)y^2+(2a^2-2a-1)y+2a=0$

Заметим, что $y=1$ корень данного уравнения:

$a+(1-a-2a^2)+(2a^2-2a-1)+2a=0$

Также, $y=2a$ – корень уравнения

$a\cdot 8a^3+(1-a-2a^2)\cdot 4a^2+(2a^2-2a-1)\cdot 2a+2a=0$

И если $a\neq 0$, то $y=-\frac{1}{a}$ также корень уравнения:

$a\left(-\frac{1}{a}\right)^3+(1-a-2a^2)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^2+(2a^2-2a-1)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)+2a=0$

1) Если $a=0$, то уравнение имеет 2 корня: $y=1$; $y=0$

$tg\,x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $tg\,x=0$, $x=\pi k$

Очевидно, расстояние между корнями на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ равно $\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

2) Если $a\neq 0$, то уравнение имеет 3 корня:

$y=1$	$y=2a$	$y=-\frac{1}{a}$
$tg\,x=1$	$tg\,x=2a$	$tg\,x=-\frac{1}{a}$
$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=arctg(2a)+\pi n$	$x=-arctg\left(\frac{1}{a}\right)+\pi n$

Но в данном случае 2 последних корня будут располагаться в разных четвертях

А значит расстояние от $\frac{\pi}{4}$ до одного из этих корней будет больше чем $\frac{\pi}{4}$, т.к один из них точно будет в 4 четверти, следовательно наименьшее расстояние между корнями будет в случае $a=0$

Ответ: $a=0$ и расстояние $\frac{\pi}{4}$

Черновик №2

③ 1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

2) $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{\dfrac{1-x^7}{-x^7}}=$

$=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{x^7}}$

3) $f(f(f(x)))=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{\frac{1}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{1-(1-x^7)}=\sqrt[7]{x^7}=x$

4) $f(f(f(f(x))))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}=f(x)$

Заметим, что дальше будет цикл из 3-х функций f:

$\Longrightarrow$ 1304 : 3 = 434 (ост. 2), тогда:

$\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{1304\text{ раза}}=f(f(x))=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{x^7}}$

$f(f(\ldots(f(2022))\ldots)=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}}=$

$=\sqrt[7]{\dfrac{2022^7-1}{2022}}$

Ответ: $\sqrt[7]{\dfrac{2022^7-1}{2022}}$

⑥ Сделаем замену $tg\,x=y$, ур-т уравнение примет вид:

$ay^3+(1-a-2a^2)y^2+(2a^2-2a-1)y+2a=0$

$y=1$ – ~~корень уравнения~~; является корнем данного уравнения

$a+(1-a-2a^2)y^2+(2a^2-2a-1)y+2a=0$

$y=2a$ – также является корнем уравнения:

$a\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)^3+(1-a-2a^2)\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2+(2a^2-2a-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)+2a=0$

Черновик №2

① $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$

~~[crossed out]~~ $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$

Вспомню, что: $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{(k(k+1))^2} = \frac{2k+1}{(k(k+1))^2} \Rightarrow$

Исходя из этого сделать вывод, что:

$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2}\right) + \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right)$

$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{45^2} = \frac{2024}{2025} < 1$ $\quad 2024 \,\underline{|\,2025}$ $\quad 0,\ldots$ $\quad < 1$

$B = \sqrt[6]{(4 - 2\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1$

~~Ва~~ Исходя из этого, делаю вывод, что $B > A$

Ответ: $B > A$, дает B большее число

② ~~(2020 : 4~~ $\underline{|\,5}$

$2020 \,\underline{|\,4}$ $\quad 505$

$\begin{array}{r} 505 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2020 \end{array}$

Числа, которые делятся

$\frac{19;\ 38;\ 57;\ 76;\ 95}{19}$ $\qquad$ $\frac{23;\ 46;\ 69;\ 92}{23}$

Черновик №1

(1)

$$A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot44)^2}+\frac{89}{(44\cdot45)^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

(1); $A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{89}{(44\cdot45)^2}$

Допустим, что $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{(k(k+1))^2}=\frac{2k+1}{(k(k+1))^2}=$

Сравнить !!!

$A>B$ - ?

$A<B$ - ?

$A=B$ - ? - невозможно в соответствии с условием задачи

1) $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{87}{(1892)^2}+\frac{89}{(1980)^2}$

43×44: $172 + 172 = 1892$

44×45: $220 + 176 = 1980$

2) $B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$B=\frac{(4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}\cdot(\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{3}}}{(2)^{\frac{1}{3}}}$

$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=$

$=\sqrt[6]{4-2\cdot3^{\frac{1}{2}}}=$

$=\sqrt[6]{2^2-2\cdot3^{\frac{1}{2}}}=$

$32;\ldots 88;$

$88-32=56$!!!...

$1980-1892=088$

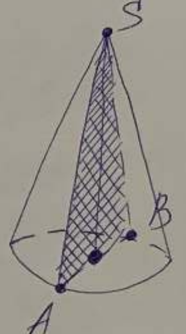
$1892+88=1980$ +

(2) $/:19;\ /:23;$

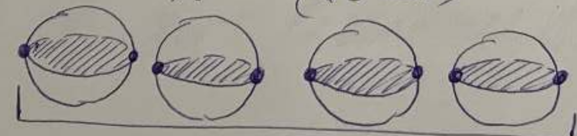
(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$; $f(f(f(f(f(\ldots f(2022)))\ldots))$

f применяется 1304

(4)



$R=2$ (13 шт)



R основание конуса?

(5) $x_1\le x_2\le x_3$; x_2 - среднее $a;b;c$;

$a=t^3-81t$; $b=11^t-121$; $c=\sin t-\frac{1}{2}$

Условие: ЗНАЧЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО !!!

(6) $\alpha\in R$

$\alpha\,tg^3x+(1-\alpha-2\alpha^2)tg^2x+(2\alpha^2-2\alpha-1)tgx+2\alpha=0$

$\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ → НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ!!!

Чистовик №4

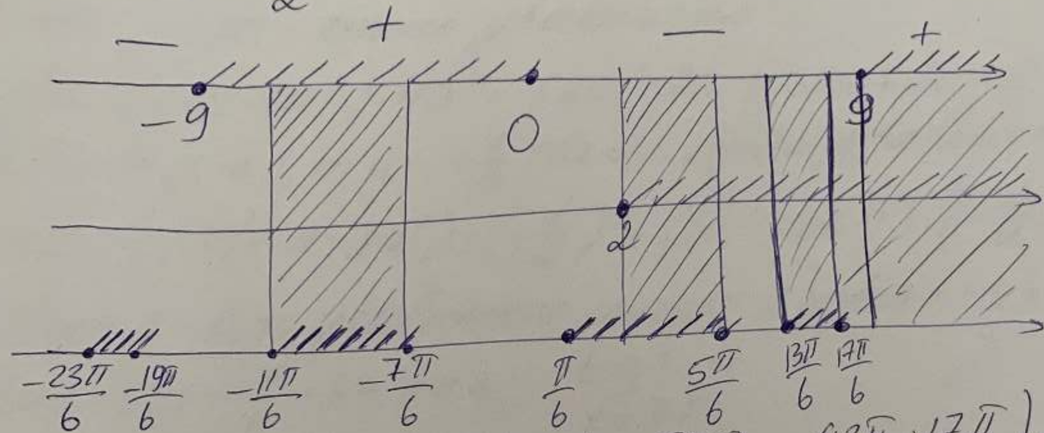
(5) Если хотя бы 2 числа из a, в, c будут положитель-ны, то условие будет выполняться:

$a = t^3 - 81t > 0$ $\quad t(t-9)(t+9) > 0$

$в = 11^t - 121 > 0$ $\quad t > 2$

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$ $\quad t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$

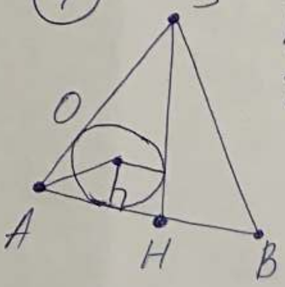
$\sin t > \frac{1}{2}$



$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

(4)



<u>Чистовик №3</u>

1) Пусть центры шаров: $O_1, O_2, \dots O_3$

Точки касания шаров с основанием:

$H_1, H_2, H_3 \dots H_{13}$

2) Так как шары касаются друг друга:

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_{13}O_1 = 2+2=4$

13 точек тут

3) Рассмотрим $\triangle HH_1H_2$: $\angle H_1HH_2 = \frac{360}{13} \Rightarrow$ тогда

$\angle KHH_2 = \frac{360}{26} = \frac{180}{13}$

из треугольника $\triangle HKH_2$: $\sin\angle KHH_2 = \frac{KH_2}{HH_2}$

$HH_2 = \frac{KH_2}{\sin\frac{180}{13}} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

Значит, $HH_1 = HH_2 \dots = HH_{13} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

4) $\angle ASB = 60° \Rightarrow \angle ASH = 30° \Rightarrow \angle SAH = 60°$;

AO – биссектриса (так как окружность касается AS и AH).

тогда $\angle O_1AH = 30°$; Из $\triangle AO_1H_1$: $AH_1 = \frac{O_1H_1}{tg30°} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$

$= 2\sqrt{3} \Rightarrow AH = AH_1 + HH_1 = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\sin\frac{180}{30}}$

Ответ: $2\sqrt{3} + \frac{2}{\sin\frac{180}{30}}$

Чистовик №2

(3) 1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^{x}}}$

2) $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\cancel{1}-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}}=$

$=\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$

3) $f(f(f(x)))=\sqrt[7]{1-\frac{1}{\frac{1}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{1-(1-x^7)}=\sqrt[7]{x^7}=x$

4) $f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}=f(x)$

Заметим, что дальше будет цикл из 3-х функций f: $\Longrightarrow$ $1304:3=434$ (ост. 2), тогда:

$$\underbrace{f(f(f(\dots f(x))\dots)}_{1304\ \text{раза}}=f(f(x))=\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

$$f(f(\dots(f(2022))\dots)=\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}=\sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022}}$$

Ответ: $\sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022}}$

Чистовик №1

① $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{89}{(44\cdot 43)^2}$

Докажем, что:

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{(k(k+1))^2} = \frac{2k+1}{(k(k+1))^2} = \frac{k+(k+1)}{(k(k+1))^2} \Rightarrow \text{тогда:}$$

$$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2}\right) + \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{43^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{45^2} = \frac{2024}{2025} < 1.$$

$$B = \sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1$$

Значит, $B > A$

Ответ: число B $(B > A)$;

② Выпишем все 2-значные числа, которые делятся на 19 и на 23

Делятся на 19: 19, 38, 57, 76, 95

Делятся на 23: 23; 46; 69; 92;

Если число начинается с „1", то следующее с „9". Но после „9" есть 2 варианта: „2" и „5"

• Если это цифра „2", то после нее может быть только „3", а после нее только „8".

Но чисел начинающихся с 8 нет, следовательно после „9" не может идти „2"

• Если после „9" идет „5", следовательно после нее „7", а после нее „6", после которой опять „9"

Таким образом, получаем цикл: 1, 9576, 9576, 9576...

Всего цифр 2021, но „1" не участвует в цикле $\Rightarrow (2021-1) : 4 = 505$, то есть цикл замыкается на 6. Ответ: 6

Черновик № 7

2) В случае $a \neq 0$, данное уравнение будет иметь 3 корня

$y = 1$, $tg\,x = -1$ | $y = 2a$, $tg\,x = 2a$ | $y = -\frac{1}{a}$, $tg\,x = -\frac{1}{a}$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ | $x = arctg\,2a + \pi n$ | $x = -arctg\left(\frac{1}{a}\right) + \pi n$

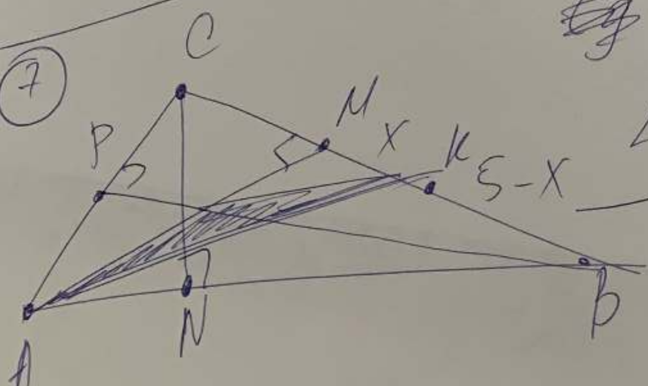
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$
$x = arctg\,2a + \pi n, n \in z$
$x = -arctg\left(\frac{1}{a}\right) + \pi n, n \in z$

Находясь в таком случае 2-е последних корней будут расположены в разных четвертях (что не будет удовлетворять условию)

Следовательно расстояние от $\frac{\pi}{4}$ до одного из этих корней будет больше, чем $\frac{\pi}{4}$, т.к один из них точно ~~будет больше, чем $\frac{\pi}{4}$~~ находится в 4 четверти, исходя из этого большее расстояние в случае $a = 0$

Ответ: $a = 0$

⑦



~~tg~~ $\angle AKM = \alpha$
$\angle OKM = \beta$

~~Максимальный~~
$tg(\alpha - \beta)$ - ?

$tg\,\alpha = \frac{AM}{MK} = \frac{AM}{X}$

$tg\,\beta = \frac{OM}{MK} = \frac{OM}{X}$

$tg(\alpha - \beta) = \frac{AM}{X} - \frac{OM}{X}$

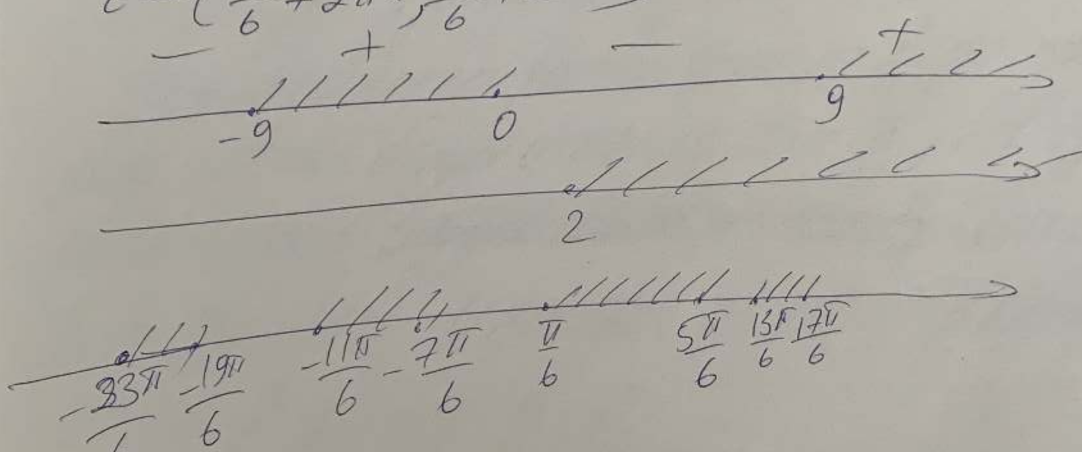
Черновик №6

⑤ Если хотя бы 2 числа из a, b, c будут положитель-мы, то условие будет выполнено:

$\cancel{a = t^3 - 81t > 0}$
$\cancel{b = 11^t}$

$a = t^3 - 81t > 0$
$b = 11^t - 121 > 0$
$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$
$\sin t > \frac{1}{2}$

$t(t-9)(t+9) > 0$
$t > 2$
$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$



Продолжение черновика ⑥ (параметр)

1) a=0, уравнение будет иметь 2 корня: $y = 1$; $y = 0$

$\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$

т.к. $\operatorname{tg} x = 0$
$x = \pi k$

$\left|\frac{\pi}{4} - 0\right| = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ — расстояние

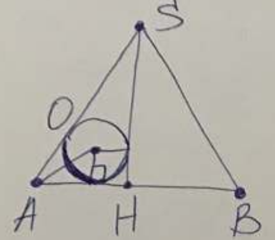
Черновик №5

④ 1) Пусть центры шаров: $O_1, O_2, \dots O_3$

Точки касания шаров с основанием: $M_1, M_2, M_3, \dots M_{13}$

2) Т.к шары касаются друг друга:

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_{13}O_1 = 2+2=4$



13 точек тут

3) Рассмотрим $\triangle HH_1H_2$: 2

$\angle H_1HH_2 = \frac{360}{13} \Rightarrow$ тогда

$\angle KHH_2 = \frac{360}{26} = \frac{180}{13}$

из треугольника $\triangle HKH_2$: $\sin\angle KHM_2 = \frac{KM_2}{HH_2}$

$HH_2 = \frac{KM_2}{\sin\frac{180}{13}} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

Значит, $HH_1 = HH_2 \dots = HH_{13} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

4) $\angle ASB = 60^\circ \Rightarrow \angle ASH = 30^\circ \Rightarrow \angle SAH = 60^\circ$,

AO – биссектриса (так как окружность касается AS и AH,

тогда $\angle O_1AH = 30^\circ$; Из $\triangle AO_1H_1$: $AH_1 = \frac{O_1H_1}{tg30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$

$= 2\sqrt{3}$, $\cancel{\Rightarrow AH} \Rightarrow AH = AH_1 + HH_1 = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$

Черновик №4

③ 1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

2) $f(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\dfrac{1-x^7}{-x^7}} =$

$= \sqrt[7]{1-\dfrac{1}{x^7}}$

3) $f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\dfrac{1-\frac{1}{1}}{1-x^7}} = \sqrt[7]{1-(1-x^7)} =$

$= \sqrt[7]{x^7} = x$

4) $f(f(f(f(x)))) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = f(x)$

Цикл состоит из 3-х функций:

$1304 : 3 = 434$ (ост 2), тогда:

$\underbrace{(f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{} = f(f(x)) = \sqrt[7]{1-\dfrac{1}{x^7}}$

по условию задачи применяется 1304 раза

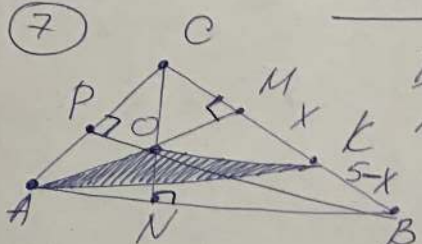
$f(f(\ldots(f(2022))\ldots) = \sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}} =$

$= \sqrt[7]{\dfrac{2022^7-1}{2022}}$

Ответ:

Чистовик (6)

(7)



1) Пусть $\angle AKM = \alpha$, $OKM = \beta$, соответственно $\angle(\alpha - \beta)$ ~~должен~~ быть максимальным (Предположим)

$$tg\,\alpha = \frac{AM}{MK} = \frac{AM}{x}$$

$$tg\,\beta = \frac{OM}{MK} = \frac{OM}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\frac{AM}{x} - \frac{OM}{x}}{1 + \frac{AM \cdot OM}{x}} = \frac{\frac{AM - OM}{x}}{1 + \frac{AM \cdot OM}{x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{AO}{x}}{1 + \frac{AM \cdot OM}{x^2}}$$

2) Заметим, что OMBN – вписанный четырехугольник

$AO \cdot AM = AN \cdot AB$

ACMN – также вписанный, откуда $AB \cdot BN = BC \cdot MB = 5 \cdot 8 = 40$

3) ~~Вписанным также является AKBN – четырехугольник~~

4) ~~Рассмотрим четырехугольник NOMK~~