МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Халяпин Юрий Дмитриевич**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

Чистовик

Задача 1.

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720=16\cdot45$, т. е. наибольшая степень двойки, на которую делится произведение чисел на всех гранях куба, равна 16, зн. если на невидимой грани куба стоит нечётное число, то произведение чисел на видимых гранях кратно 16, а если чётное, то не ~~делится~~ кратно, т. е. вероятность того, что это произведение делится на 16, равна вероятности того, что на невидимой грани стоит нечётное число, но среди 6 чисел на гранях куба 3 нечётных, зн. эта вероятность равна $\frac{3}{6}=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Задача 2.

Требуется найти количество чётных натуральных чисел, не превышающих 2022, остатки от деления которых на 3 не равны 1. Среди натуральных чисел, не превышающих 2022, $2022:2=1011$ чётных. $1011 \vdots 3$, зн. ровно у $\frac{2}{3}$ из этих чисел остатки при делении на 3 не равны 1. Всего таких чисел $\frac{2}{3}\cdot1011=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot337}{\cancel{3}}=674$.

Ответ: 674.

Задача 5.

Среднее из 3 чисел положительно тогда и тогда, когда хотя бы 2 из них положительны, т. е. требуется найти все значения x, при которых хотя бы 2 из чисел a, b и c положительны. Обозначим множество решений неравенства $a>0$ за A, $b>0$ – за B, $c>0$ – за C, тогда требуется найти $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$a>0$

$x^3-100x>0$

$x(x^2-100)>0$

$x(x-10)(x+10)>0$

$y=x(x-10)(x+10)$, $y=0$ при

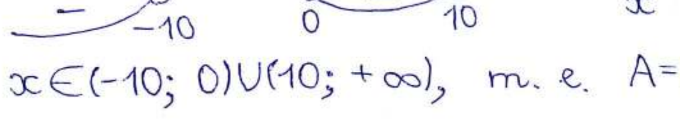
$x(x-10)(x+10)=0$

$\underline{x=0}$ или $x-10=0$ или $x+10=0$

$\underline{x=10}$ $\quad$ $\underline{x=-10}$

Знаки:

Если $x=11$, то $y=11\cdot(11-10)\cdot(11+10)=11\cdot1\cdot21=231>0$



$x\in(-10;\ 0)\cup(10;\ +\infty)$, т. е. $A=(-10;\ 0)\cup(10;\ +\infty)$.

$b > 0$

$x^4 - 16 > 0$

$x^4 > 16$

$|x| > 2$

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, т. е. $B = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

$c > 0$

$x + 20 - x^2 > 0$

$-x^2 - 4x + 5x + 20 > 0$

$-x(x+4) + 5(x+4) > 0$

$(x+4)(5-x) > 0$

$y = (x+4)(5-x)$, $y = 0$ при

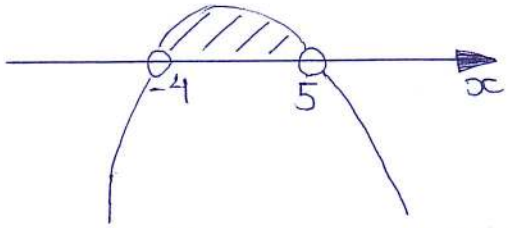
$(x+4)(5-x) = 0$

$x + 4 = 0$ или $5 - x = 0$

$\underline{x = -4}$ $\qquad \underline{x = 5}$

Знаки:

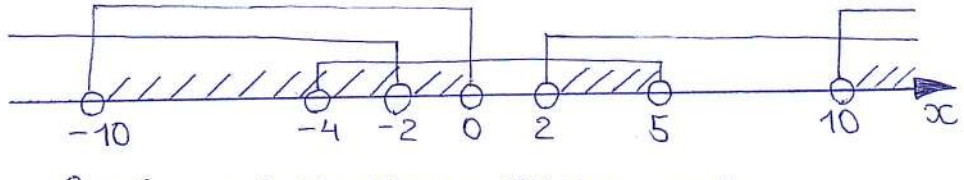
Если $x = -5$, то $y = (-5+4)(5-(-5)) = -1 \cdot 10 = -10 < 0$



$x \in (-4; 5)$, т. е. $C = (-4; 5)$.

$A = (-10; 0) \cup (10; +\infty)$, $B = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, $C = (-4; 5)$, зн.

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$.



Ответ: $(-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$.

№3.

Выпишем остатки степеней числа 9 при делении на 1000:
9, 81, 729, 561, 49, 441, 969, 721, 489, 401, 609, 481, 329, 961, 649, 841, 569,
121, 89, 801, 209, 881, 929, 361, 249, 241, 169, 521, 689, 201, 809, 281, 529,
761, 849, 641, 769, 921, 289, 601, 409, 681, 129, 161, 449, 41, 369, 321, 889,
1, 9, ... В этом ряду 51-й остаток совпал с первым, зн.
период остатков степеней девятки при делении на 1000 равен 50, т. е. для любых $a \in N$ и $n \in N$, $9^{50n+a} \equiv 9^a \pmod{1000}$, зн.
$9^{2022} \equiv 9^{22} \equiv 881 \pmod{1000}$, т. к. $2000 = 50 \cdot 40$, а 881 – 22-е число в выписанном ряду остатков, т. е. последние 3 цифры числа
9^{2022} – 881, при этом $10^{2022} = 1\underbrace{00\ldots0}_{k}$, k ~~больше~~ не меньше количества цифр

Чистовик

в числе 9^{2022}, зн. число $10^{2022}-9^{2022}$ заканчивается на $1000-881=119$.

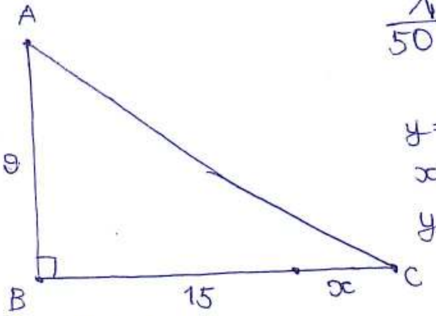
Ответ: 119.

V Черновик

№1. $\frac{5}{6}+$

№3. $\cancel{x}\cdot 561\cdot 9=5049$

$49\cdot 9=441$



$$\frac{x}{50}+\frac{\sqrt{(15-x)^2+81}}{40}=0{,}02x+\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40}$$

$y=x^2-30x+306$

$x_0=15$

$y_0=81$

$0{,}3+0{,}225=0{,}525$

$\sqrt{\frac{306}{1600}}=\sqrt{\frac{153}{800}}$

$a=x^2(x-100)$

$b=x^4-16$

$c=-x^2+x+20$

$x^4>16$

$\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right.$

$x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

$\cancel{x^2(x^2-100)>0}$

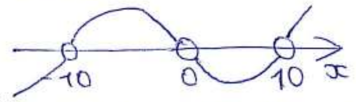
$\cancel{x>100}$

$x^3-100x>0$

$x(x^2-100)>0$

$x=0$ или $x=\pm 10$

Знаки:



$x\in(-10;0)\cup(10;+\infty)$

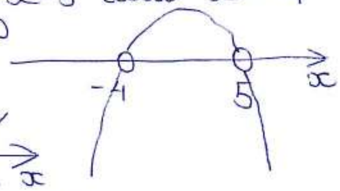
$-x^2+x+20>0$

$x^2-x-20=0$

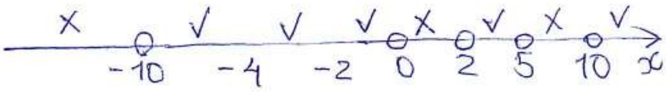
$x^2-5x+4x-20=0$

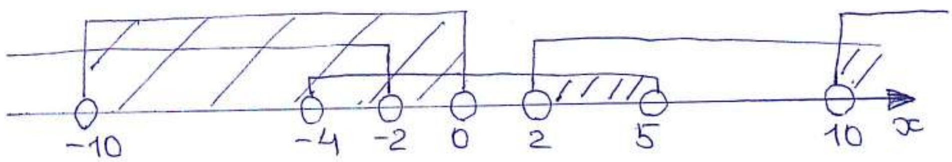
$(x-5)(x+4)=0$

$x=5$ или $x=-4$



$x\in(-4;5)$





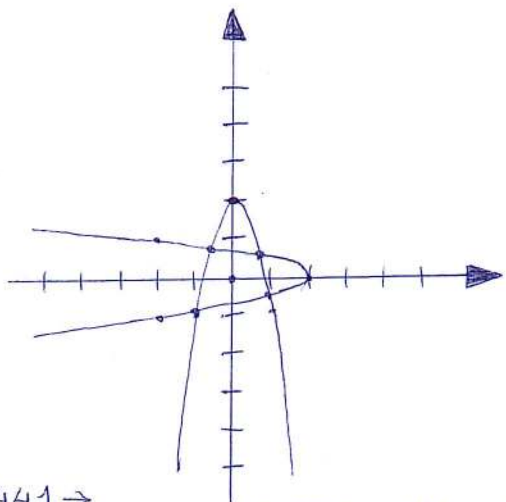
$x=-4(2-3x^2)^2+2$

$x=-4(4-12x^2+9x^4)+2$

$x=-16+48x^2-36x^4+2$

$36x^4-48x^2+x+14=0$

$0{,}1+\frac{\sqrt{181}}{40}=\frac{4+\sqrt{181}}{40}$



$9\to 81\to 729\to 561\to 49\to 441\to$
$\to 481\to 4329\to 961\to 649\to 841\to 569\to 121\to 89\to$
$\to 969\to 721\to 489\to 401\to 609\to 481\to 4329\to 961\to 649\to 841\to 569\to 121\to 89\to$
$\to 801\to 209\to 881\to 929\to 361\to 249\to 241\to 169\to 521\to 689\to 201\to 809\to 281\to$
$\to 529\to 761\to 849\to 641\to 769\to 921\to 289\to 601\to 409\to 681\to 129\to 161\to 449\to 41\to$
$\to 369\to 321\to 889\to 1\to 9$