МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хасанов Булат Ильнурович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	15

Задача N 1

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1 = A$$

$$\sum \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

Докажем по индукции

Тогда База: $\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{3^2+5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{27+5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{32}{4\cdot 3^2} = \frac{8}{3^2} = \frac{(3-1)(3+1)}{3^2}$

Переход $k \to k+1$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2+(k+2)^2} = \frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2} =$$

$$= \frac{k(k+2)^3 + 2(k+1)+1}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2} = \frac{k(k^3+6k^2+12k+8)+2k+2}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{k^4+6k^3+12k^2+10k+3}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2} =$$

$$= \frac{(k^2+2k+1)(k^2+4k+3)}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2} = \frac{(k+1)^2(k+1)(k+3)}{(k+1)^2\cdot(k+2^2)} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{59\cdot 61}{60^2} = \frac{(60-1)(60+1)}{60^2} = \frac{60^2-1}{60^2} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B < 1 \quad A = 1 \Rightarrow$ $A > B$ ч.т.д.

Задача №2.

Выпишем все 2-ух значные, которые делятся на 19 и 23

19, 38, 57, 76, 95

23, 46, 69, 92

Если число начинается с 4, то после него должно быть только 6, т.к. подходит только число 46. аналогичным методом строим дерево.

число $\overline{8a} \not\vdots 19$ $\overline{8a} \not\vdots 23$.

2 − 3 − 8 *

$\underbrace{4 - 6 - 9}_{3}$

2 − 3 − 8 *

$\underbrace{5 - 7 - 6 - 9}_{4}$

$\underbrace{5 - 7 - 6 - 9}_{4}$ ...

2 − 3 − 8

9

5 − 7 − 6 − 9

$2021 = 3 + 4k + m = 2021 = 3 + 2016 + 2 \Rightarrow$

2019 цифра числа $\Rightarrow$ 2021 цифра

$\Rightarrow$ 2021 цифра либо 3, либо 7

Ответ: 3 или 7.

Задача N 3

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-f(x)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x} = -\sqrt[7]{\frac{1-x^7}{x^7}} =$$

$$= -\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}-1} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

$$f(f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-f(f(x))^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\left(1-\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x_7}}\right)^7\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-1+\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow f(f(f(x)))=x$$

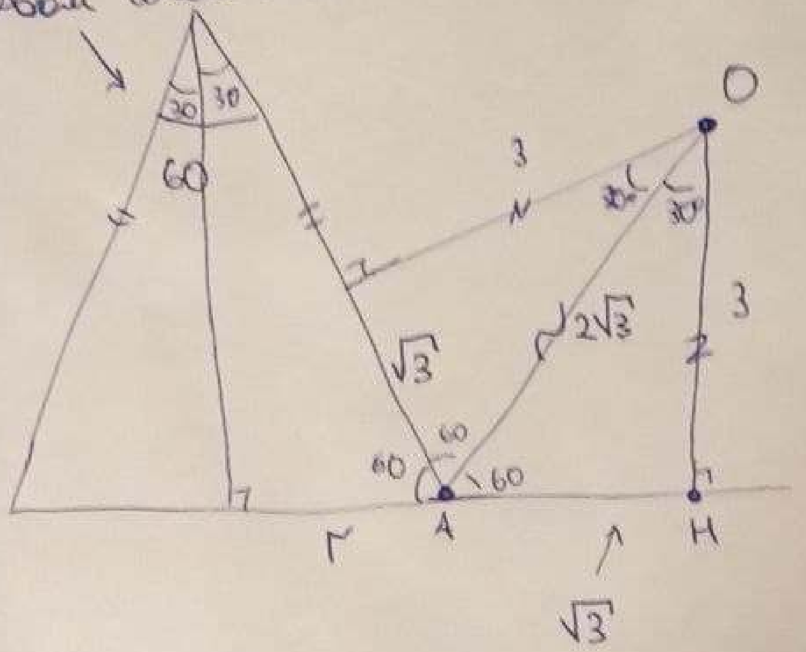
$$434\cdot 3=1302 \Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(2022)\dots}_{1304 \text{ раза } f})) = f(f(2022)) = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

$$\Downarrow \qquad \Uparrow$$

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{1304 \text{ раза } f} = f(f(x)$$

Задача №4

угол при вершине в осевом сечении 60°



Вид сбоку

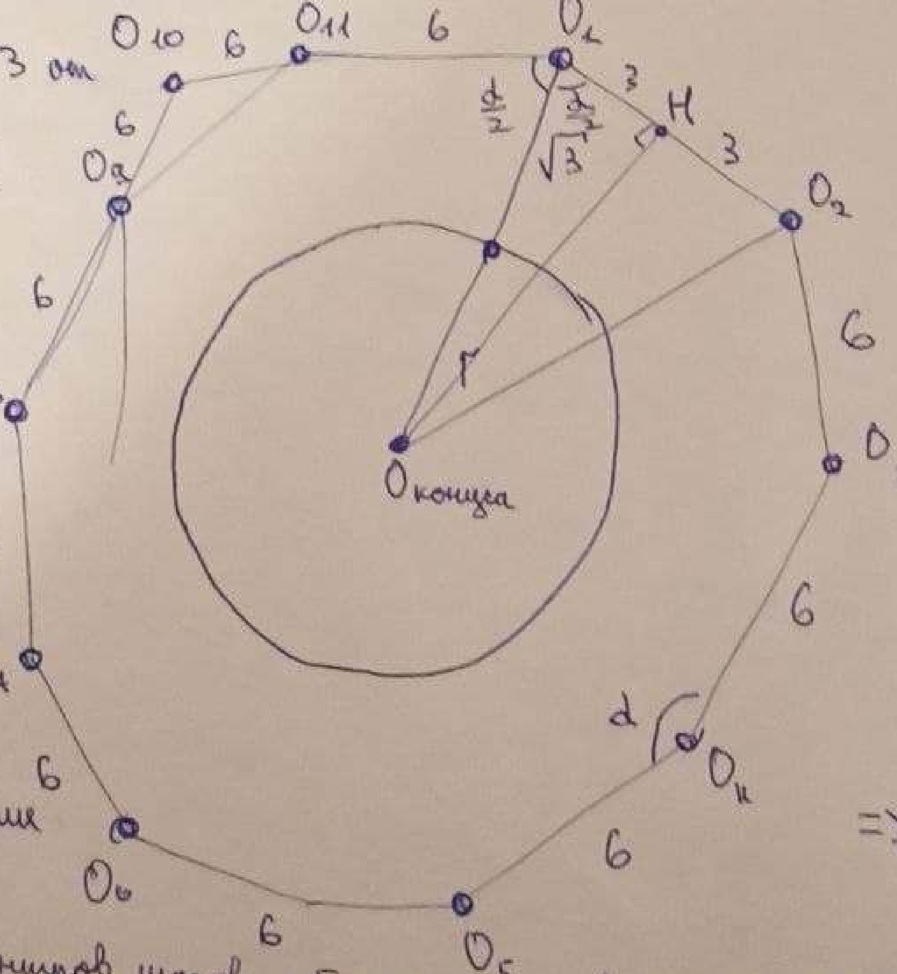
$AH = x \quad AH^2 + HO^2 = OA^2$

$OA = 2x \quad x^2 + 9 = 4x^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt{3} = AH.$

Вид сверху, все центра шаров находяться в одной плоскости, т.к. все находяться на расстоянии 3 от плоскости основания конуса. И т.к. две соседние касаются, то расстояние между их центрами $= 2R = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$ 11 центров шаров образуют правильный 11-угольник со стороной 6.

$\alpha = \dfrac{180 \cdot (11-2)}{11}$



$O_{конуса}O_1 = \sqrt{3} + r$

$O_1H = 3$

$\frac{\alpha}{2} = \dfrac{90 \cdot 9^\circ}{11}$

$\Downarrow$

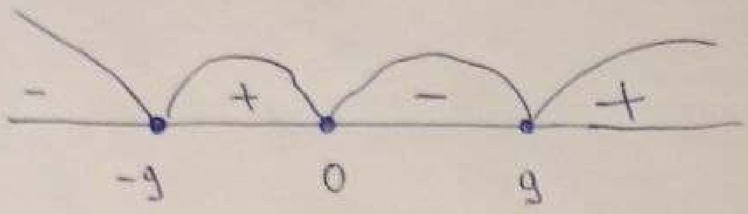
$O_{конуса}O_1 =$

$= \dfrac{3}{\cos\frac{810^\circ}{11}} = \sqrt{3} + r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{3}{\cos\frac{810^\circ}{11}} - \sqrt{3}$

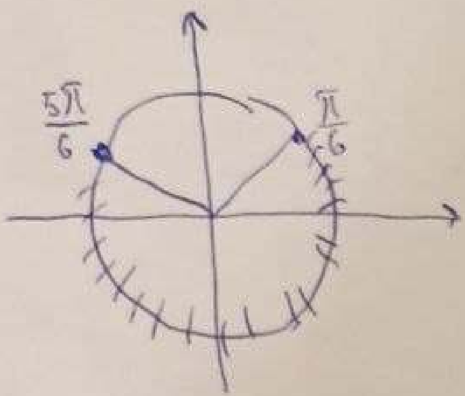
N 5

$a = t^3 - 81t > 0$ при $t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$



$b = 11^t - 121 = 121(11^{t-2} - 1) > 0$ при $t \in (2;+\infty)$

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$ при $t \in (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 4\pi k)$



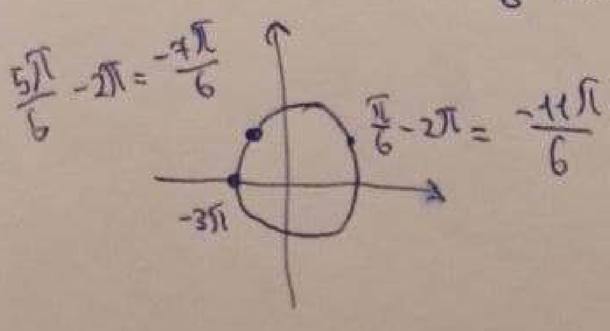
Если $t > 9$, то $a > 0$ и $b > 0$ => среднее больше 0 => среднее > 0

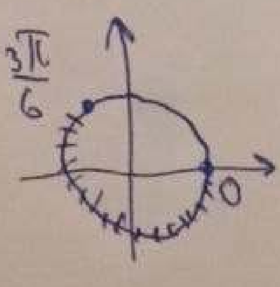
Если $t \leq -9$, то $a \leq 0$ и $b \leq 0$ => среднее ≤ 0

Если $t \in [0;2]$, то $a \leq 0$ и $b \leq 0$ => среднее ≤ 0

При $t \in (-9;0)$ $a > 0$; $b \leq 0$

$t \in (-9; -\frac{11\pi}{6}) \cup (-\frac{7\pi}{6}; 0)$

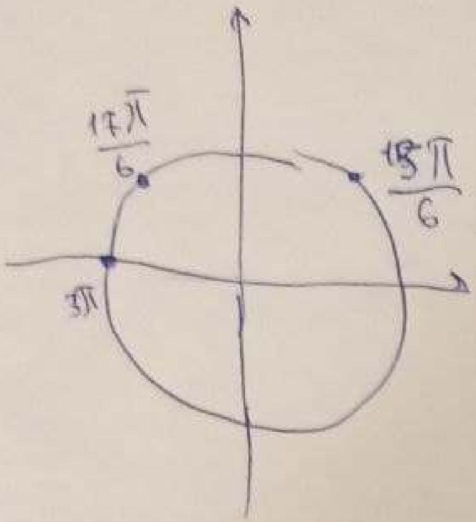


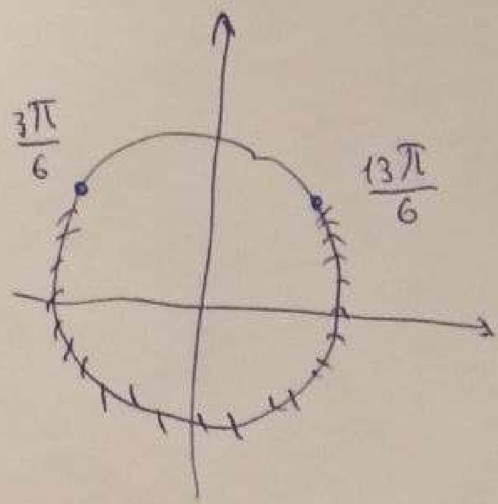


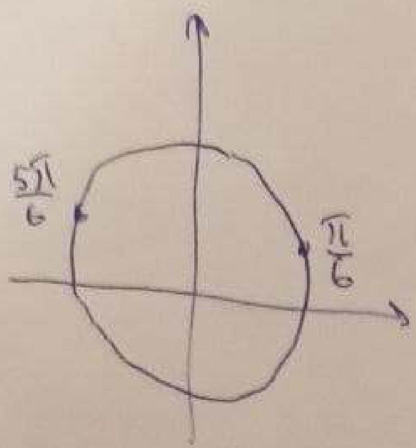
Задача N5 Продолжение.

Осталось рассмотреть $t \in (2; 9]$

при нём $a \leq 0$ $b > 0$ тогда $c > 0$







$t \in \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{17\pi}{6}; 9\right)$

Итого ответ:

$t \in \left(-9; -\frac{11}{6}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{6}; 0\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{17\pi}{6}; 9\right) \cup (9 + \infty)$

ч.т.д.

Задача №6

Заменим $ctg\,x$ на t => Получим

$$at^3+(2a^3-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$$

$$(t-1)(at^2+t(2a^2-2)-4a)=0$$

$$at^2+t(2a^2-2)-4a=0$$

$$D=(2a^2-2)^2+16a^2=4a^4+4-8a^2+16a^2=4a^4+4+8a^2=(2a^2+2)^2 =>$$

$$=> \sqrt{D}=2a^2+2$$

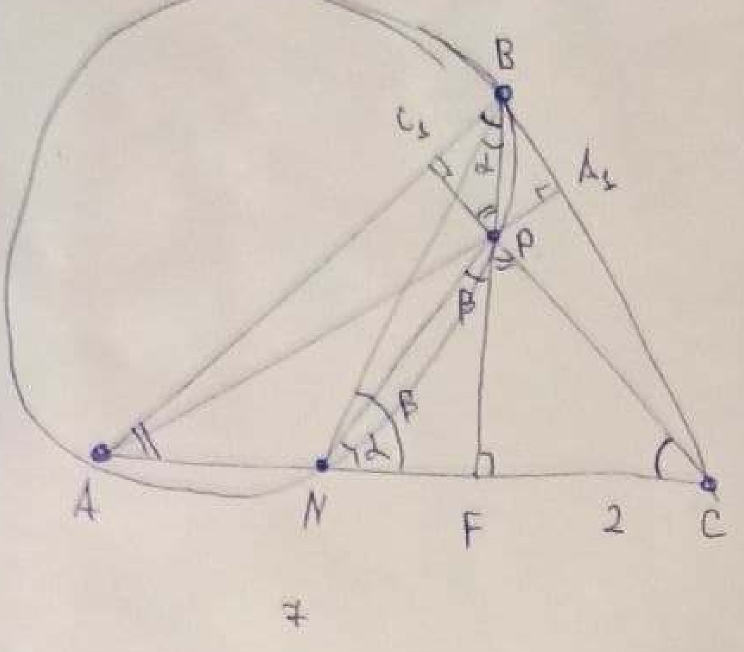
$$t_1=\frac{2-2a^2+2a^2+2}{2a}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$$

$$t_2=\frac{2-2a^2-2a^2-2}{2a}=\frac{-4a^2}{2a}=-2a$$

Корни $1, \frac{2}{a}, -2a$. Осталось заметить, что одно из этих чисел отрицательное, значит один из корней будет больше $\frac{\pi}{2}$ и при этом уже есть корень $\frac{\pi}{4}$ при $ctg\,x=1$.

То есть не меньше $\frac{\pi}{4}$ (раст. строго больше уже). При $a=0$ у нас ровно 2 корня $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$ => расстояние ровно $\frac{\pi}{4}$ => это ответ: $\frac{\pi}{4}$ ч.т.д.

Задача №7



AA_1 - высота

CC_1 - высота

Чтобы угол BNP был максимальным, окр. описанная около $\triangle BPN$ должна иметь минимальный радиус. Т.к. BP фиксированная хорда рассмотрим все окружности с этой хордой. $BP = z$ $\angle BNP = \varphi$ - тогда $\frac{z}{\sin\varphi} = 2R$, при увеличении R $\sin\varphi$ уменьшается значит и острый угол $\angle BNP$ уменьшается $\Rightarrow$ окр. опис. около $\triangle BPN$ касается AC $\Rightarrow \angle PNF = \angle NBF = \alpha$

$\angle NPF = \angle BNF = \beta$ тогда $\triangle PNF \sim \triangle NBF$ тогда $\frac{NF}{BF} = \frac{PF}{NF} \Rightarrow$

$NF^2 = BF \cdot PF$

$\angle ABF = \angle C_1CA$ и $\angle C_1PB = \angle FPC = \angle BAC \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle CPF \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{PF}{AF} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow PF \cdot BF = AF \cdot CF = 7 \cdot 2 = NF^2 \Rightarrow NF = \sqrt{14}$ - ч.т.д.