МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хлебина Ирина Андреевна**

Класс: **9 класс**

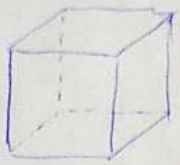
Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

Черновик 1



a ① $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=2\cdot4\cdot2\cdot(3\cdot5\cdot3)$ $\vdots 16$

②

B: 1: 49 2

$801 \cdot 9 = 209$

$674 \cdot 3 = 2022$

$89 \cdot 9 = 801$

$1011 - 337$

$121 \cdot 9 = 1089$

2022

$337 \cdot 2 = 674$

$1011 - 337 = 674$

$569 \cdot 9 = 5121$

1 3 5 ...

1 4 7 10

2 3 5 6 8 9

$n \leq 2022$

1 3 5 7 9

1 4 7 10

$\frac{10}{2}=5$

$401 \cdot 9 = 3609$

$489 \cdot 9 = 4401$

$\frac{2022}{2}=1011$

268

$\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}\to 4$

$569 \cdot 9 = 5121$

$\frac{4}{2}=2$

~~1 3 5 7~~ 9 11 13 15 17

$10-(5+2)=3$

1 4 7 10 13 16

$841 \cdot 9 = 569$

1 3 5 7 9 11 13 15

2 6 8 12 14 18

1 4 7 10 13

$\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}\to 8$

$36 + 4 = 43$

$\frac{18}{2}=9$

2 6 8 12 14

$649 \cdot 9 = 841$

$\frac{15}{3}=5$

$481 \cdot 9 = 4329$

$561 \cdot 3 = 1683$

$721 \cdot 9 = 6489$

$15-(8+2)=5$

$\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}\to 2$

$\frac{18}{3}=6$

$961 \cdot 9 = 8649$

0000

$729 \cdot 9 = 6561$

$81 \cdot 9 = 729$

$609 \cdot 9 = 5481$

$\frac{6}{2}=3$

$561 \cdot 9 = 5049$

$49 \cdot 9 = 441$

$801 \cdot 9 = 209$

$9 \cdot 9 = 81$

$9-3=6$

$441 \cdot 9 = 3969$

$969 \cdot 9 = 8721$

$329 \cdot 9 = 2961$

$481 \cdot 9 = 4329$

$329 \cdot 9 = 2961$

$209 \cdot 9 = 881$

$9\to 81\to 729\to 561\to 049\to 441\to 969\to 721\to 489\to 401\to$

$\to 609\to 481\to 329\to 961\to 649\to 841\to 569\to 121\to 089\to 801$

$(+8)\ 9\cdot 9+8 \quad 9\cdot 9+8$

209

809

409

0009

$000 - 881 = 119$

$\overline{abc}$

$2k+1 \quad 2k$

$\overline{abc}\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 \quad \equiv \overline{abc}$

0	0	9
0	8	1
7	2	9
5	6	1
0	4	9
4	4	1
9	6	9
7	2	1
4	8	9
4	0	1
6	0	9
4		

10

$A\cdot 9^k \overset{1000}{\equiv} A$

$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

$125 : 3 = 41$

$9^k \overset{1000}{\equiv} 1$

$5^3 \overset{3}{\equiv} 2$

$7^2=49$

$9^{999} \overset{1000}{\equiv} 1$

$11^2=121$

$A\cdot 9^k \overset{1000}{\equiv} A$

$\varphi(1000)=$

$=1000(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$9^k \overset{1000}{\equiv} 1$

$3^3 \overset{4}{\equiv} 27$

$A^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$

Черновик 2

$a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$

$\varphi(1000) = 400$

$a^{400} \overset{n}{\equiv} 1$

$9^{400} \overset{1000}{\equiv} 1$

$9^{400\cdot 5} \cdot 9^{22}$

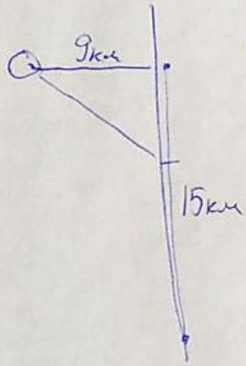
$\varphi(10) = 1\ 3\ \cancel{5}\ 7\ 9 = 4$ 1 3 7 4

$\varphi(10)\cdot 100$

$\varphi(\cancel{2}) = 1\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 = 8$

1 3 7 9
11 13 17 19
21 23 27 29

$$\begin{array}{r} \times\ 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$



$t = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{9 + (15-x)^2}}{40} = \frac{40x + 50\sqrt{\ }}{2000}$

$81 + 225 - 30x + x^2$

$40x + 50\sqrt{\ }$ $\overset{?}{\cancel{4}}\ t_0$

$50\frac{км}{ч}$ $40\frac{км}{ч}$

$x^3 - 100x$

$x^4 - 16$

$-x^2 + x + 20$

36 0 −48 +1 −14
+36 −24
+24 −16
−32

+36 − 8
+8

$y = -3x^2 + 2$

$A(a, b)$

$x = -4(-3x^2 + 2)^2 + 2$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ $x = -4(9x^4 - 12x^2 + 4) + 2$

$x = -36x^4 + 48x^2 - 16 + 2$

$\begin{cases} y = -3x^2 + 2 \\ x = -4y^2 + 2 \end{cases}$

$4y^2 = 2 - x$

$36x^4 - 48x^2 + x - 14 = 0$

$\cancel{36}(\cancel{6x^2 - 12x + 1})^2$

38 18

$36x^4 - 12x^2 + 1$
$+18$ 9
$-36x^2 + x - 15$
−39

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{18}$

$\frac{2}{3}\ \frac{2}{9}$

36 − 3

36 − 6
+6 − 1
−47

$\frac{7}{\cancel{4}6}\ \frac{7}{9}\ \frac{7}{12}\ \frac{7}{18}$

$(\underbrace{(\quad)}_{9})$ ()()()()()()()()()

++++++
9

36 − 12
+12 − 4
−44

(()) 2

(()()) ((())) 3

((()())) ((()())) ((())()) 4

36 +12
−12 −4

36 − 9
+9 − 4
−47

((()))

36 − 9
+9

36 − 4
+4

1+1+1+1 3+1 2+2 2+1+1 1+2+1 4

5 (()()()()) + 2 + 1 + 2 + 4 =

Чистовик 1

Задача 1

Всего вариантов упасть у кубика 6, причём они равнозначны:

1) не видно 1 → $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=2\cdot4\cdot2\cdot3\cdot5\cdot3=16\cdot3\cdot5\cdot3\ \vdots\ 16$

2) не видно 2 → $1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=4\cdot2\cdot3\cdot5\cdot3=8\cdot3\cdot5\cdot3\ \vdots\ 8\ \not\vdots\ 16$

3) не видно 3 → $1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6=2\cdot4\cdot2\cdot5\cdot3=16\cdot5\cdot3\ \vdots\ 16$

4) не видно 4 → $1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot3=4\cdot3\cdot5\cdot3\ \vdots\ 4\ \not\vdots\ 16$

5) не видно 5 → $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6=2\cdot4\cdot2\cdot3\cdot3=16\cdot3\cdot3\ \vdots\ 16$

6) не видно 6 → $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=2\cdot4\cdot3\cdot5=8\cdot3\cdot5\ \vdots\ 8\ \not\vdots\ 16$

И в 3 случаях ~~количество~~ произведение делится на 16, значит вероятность равна $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ или 50%

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 2

Натуральных чисел ~~от 1~~ не превышающих 2022 ровно 2022 (от 1 до 2022)

В первой арифметической прогрессии находятся все нечетные числа, значит Числа от 1 до 2022, которые не входят в первую арифметическую прогрессию все чётные, то есть их $\frac{2022}{2}=1011$ (каждое 2-ое число)

У второй прогрессии разность 3, то есть в ней каждое второе число чётное (т.к. первый член нечётный, а разница нечётная)

Всего во второй прогрессии чисел не превышающих 2022: $\frac{2022}{3}=674$

Из них чётных: $\frac{674}{2}=337$

Чисел ~~меньше~~ не превышающих 2022 и не входящих ни в одну из 2-ух данных арифметических прогрессий: $1011-337=674$

Ответ: 674

Задача 3

Последние 3 цифры числа 10^{2022} это 3 нуля, а у 9^{2022} это остаток по модулю 1000.

Вспомним, что ~~но~~ $a^{\varphi(n)}\overset{n}{\equiv}1$. $n=1000$, найдём значение функции Эйлера для 1000, все остатки, взаимнопростые с этим числом заканчиваются на 1, 3, 7 и 9, т.к. $1000=2^3\cdot5^3$, признак делимости на 2, это то, что последняя цифра делится на 2, а на 5, то, что число заканчивается на 0 или 5. В каждом десятке взаимнопростых остатков 4, всего ~~от~~ десятков $\frac{1000}{10}=100 \Rightarrow \varphi(1000)=400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9^{400}\overset{1000}{\equiv}1 \Rightarrow 9^{4000}\overset{1000}{\equiv}1 \Rightarrow 9^{2022}\overset{1000}{\equiv}9^{2000}\cdot9^{22}\overset{1000}{\equiv}9^{22}$

Чистовик 2

Задача 3 (продолжение)

$9^{22} \overset{1000}{\equiv} A$

Для этого нам нужно только последние 3 цифры числа:

1 – 009	12 – 481
2 – 081	13 – 329
3 – 729	14 – 961
4 – 561	15 – 649
5 – 049	16 – 841
6 – 441	17 – 569
7 – 969	18 – 121
8 – 721	19 – 089
9 – 489	20 – 801
10 – 401	21 – 209
11 – 609	22 – 881

$9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 881$, то есть заканчивается на 881

$10^{2022} - 9^{2022} = 1\ldots000 - \ldots881 =$

$= \ldots119$

Ответ: 119

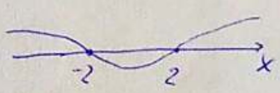
Задача 5

Когда 2 и более из 3 чисел положительны, то и среднее будет положительно, когда 2 и более чисел не положительны, то и среднее не положительно. Узнаем знаки чисел на промежутках.

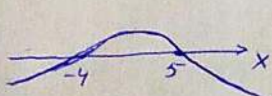
$a = x^3 - 100x = x(x^2 - 100) = x(x-10)(x+10)$

$b = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

$\overset{\vee}{0}$



$c = x + 20 - x^2 = -x^2 + x + 20 = (x-5)(-x-4) = -(x-5)(x+4)$



	$(-\infty; -10)$	-10	$(-10; -4)$	-4	$(-4; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2, 5)$	5
a	–	0	+	+	+	+	+	0	–	–	–	–
b	+	+	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+
c	–	–	–	0	+	+	+	+	+	+	+	0

Чистовик 3

Задача 5 (продолжение)

	$(5;10)$	10	$(10;+\infty)$
a	$-$	0	$+$
b	$+$	$+$	$+$
c	$-$	$-$	$-$

2 и более положительных числа ~~на~~ получаются при x:

$(-10;-4)$

-4

$(-4;-2)$ то есть при $x \in (-10;0) \cup (2;5) \cup (10;+\infty)$

-2

$(-2;0)$

$(2;5)$

$(10;+\infty)$

Ответ: $(-10;0) \cup (2;5) \cup (10;+\infty)$

Задача 7

Один пакет: $()$ 1

2 пакета: $(())$ 1

3 пакета: $((()))\ (()())$ 2

~~4 пакета:~~ Мы точно знаем, что 1 пакет располагается так (...), а все остальные внутри него, то есть для n пакетов, мы должны расположить внутри $(n-1)$ пакет, для этого ~~доcо~~ достаточно посчитать варианты разбиения на пакеты пакетов:

4 пакета: „1+1+1" + „2+1" + „3"

$1 + 1\cdot 1 + 2 = 4$

5 пакетов: „1+1+1+1~~+1~~" + „4" + „3+1" + „2+2" + „2+1+1" + ~~„1+2+1"~~ + ~~+„...~~

$1 + 4 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + \cancel{(1\cdot 1\cdot 1)} = 9$

6 пакетов: „5" + "4+1" + "3+1+1" + ~~"1+3+1"~~ + "3+2" + "2+2+1" + ~~"2+1+2"~~ +

$9 + 4\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 +$

+ "2+1+1+1" + "1+1+1+1+1"

$+ 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 9+4+2+2+1+1+1 = 20$

Чистовик 4

7 пакетов: "6" + "5+1" + "4+2" + "4+1+1" + "3+3" + "3+2+1" + "3+1+1" +

$20 + 9\cdot 1 + 4\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 +$

+ "2+2+2" + "2+2+1+1" + "2+1+1+1+1" + "1+1+1+1+1+1" +

$+ 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 =$

$= 20+9+4+4+4+2+2+1+1+1+1 = 49$

8 пакетов: ~~"7" + "6+1" + "5+2" + "5+1+1" + "4+3" + "4~~

"7" + "6+1" + "5 + 3 пакета" + "4 + 4 пакета" +

$49 + 20 + 9\cdot 2 + 4\cdot 4 +$

+ "3+3+1" + "3+2+2" + "3+2+1+1" + "3+1+1+1+1"

$+ 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

"2+2+2+1"