МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Цисарук Мария Сергеевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	15	15

Чистовик 1

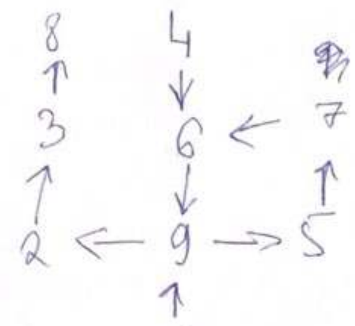
№2

Для каждой цифры напишем 2-х значные числа, делящиеся на 19 и 23, которые с нее начинаются

19 38 57 76 95 13 46 69 92

0 - нет
1 - 19
2 - 23
3 - 38
4 - 46
5 - 57
6 - 69
7 - 76
8 - нет
9 - 92 и 95

если соединить стрелочками цифру с той, которая может идти после нее, то:



Значит, число обязательно имеет вид

469 576 957 6957... 6957

на одной из этих цифр обрывается

или 469 576 957... 69238

на одной из этих цифр обрывается

$2022 = 4 \cdot 505 + 2$

Всего цифр 2022 (ост. 2 при делении на 4)

поэтому число имеет вид либо

$\underbrace{469576957...6975}_{505 \text{ раз}}$ еще одна цифра, т.е

Чистовик 2

4697...69576 либо

$4\underbrace{69576957...6957}_{504 \text{ раза}},69238$

Ответ: 6 или 8

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{\cancel{1}-x^9-\cancel{1}}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{\cancel{x^9}+1-\cancel{x^9}}{x^9}}} = x$$

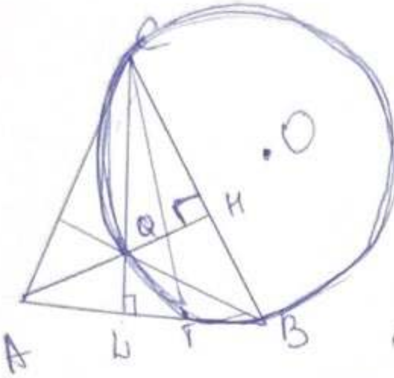
Если все преобразования были допущены (т.е. если $1-x^9 \neq 0$, $x \neq 0$, т.е $x \neq 0;1$), то

$\Rightarrow \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{1305 = 9 \cdot 435 \text{ раз}} = x$, если $x \neq 0;1$

Ответ: 2022

Чистовик 3

№1



1) Сначала докажем, что есть ровно 2 окр, проходящие через C, Q, и ~~центр любой~~ ~~окр, проходящая~~ касающиеся прямой ~~AB~~ AB

центр любой окр., проходящей через C, Q, лежит на серединном перпендикуляре к CQ

Будем двигать т. O по этому перпендикуляру вправо, начиная от середины CQ

При этом расстояние от O до C строго увеличивается, а расстояния до прямой AB не меняется (т.к $CQ \perp AB$). И в начальный момент расстояние до C было меньше, чем до AB, т.к $\frac{CQ}{2} < \frac{CQ}{2} + Ch$

$\Rightarrow$ при этом луче ровно один момент, когда эти расстояния (до C и до (AB)) совпадут.*

2) Нашли окр. слева и одну справа. Они симметричны относительно прямой CQ, поэтому расстояние от h до точек касания равны. Пусть T - точка касания той окр, которая справа.

Пусть AH - высота $\triangle ABC$, тогда Q лежит на AH, и $\triangle CQH$ - прямоугольный

*Аналогично, если рассматривать точки, которые слева

чистовик 4

Тогда $LT^2 = LD \cdot LC$ (~~степень точки~~)

ΔAQL и ΔCBL подобны (прямоугольные,

$\angle AQL + \angle QAL = 90°$, $\angle CQH + \angle QCH = 90°$,

$\angle AQL = \angle CQH$ как вертикальные,

$\angle CQH = \angle BCL$, $\angle BCL + \angle CBL = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QAL = \angle BCL \Rightarrow \dfrac{AL}{QL} = \dfrac{CL}{BC}$

$AL \cdot BL = CL \cdot QL \Rightarrow LT^2 = AL \cdot BL = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow LT = \sqrt{10}$

Теперь нужно доказать, что $T = S$, т.е. что

$\angle CSQ$ - максимальный когда $T = S$.

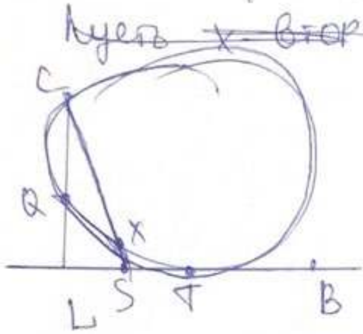
Рассмотрим только ~~точки~~ точки луча $[LB)$, т.к.

с другой стороны симметрично

Ясно, что если S лежит на этом луче и не

равна T, то S лежит вне окр (CQT)

~~Пусть X второе~~



Пусть X - второе пересечение CS

с окр.

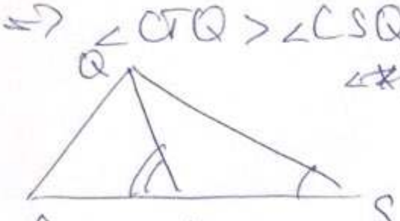
тогда $\angle CXQ = \angle CTQ$, как вписанные

$\angle CXQ > \angle CSQ$, т.к

~~$\angle CXS$~~ $\angle XQS = \angle CXQ - \angle CSQ$, $\Rightarrow$

$\angle XQS > 0$

$\Rightarrow \angle CTQ > \angle CSQ$



~~$\angle XQ$~~ $\Rightarrow T$ — точка S из условия

Ответ: $LS = \sqrt{10}$

чистовик 5

N5

$$\begin{cases} a = t^3 - 121t = t(t-11)(t+11) \\ b = 2^t - 32 \\ c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Если хотя бы два числа положительны, то среднее из трех положительно (т.к. если $x < y \le z$, и $y < 0$, то $\begin{cases} x \text{ непол.} \\ y \text{ непол} \end{cases}$ ⇒ противоречие

2) если хотя бы два числа не положительные, то среднее из трех неположительно (т.к. если $x < y \le z$, $y > 0$, то $\begin{cases} y \text{ пол} \\ z \text{ пол} \end{cases}$ ⇒ противоречие

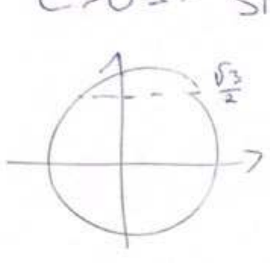
$a > 0 \Rightarrow t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$ $\quad t(t-11)(t+11) > 0$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-11 \quad 0 \quad 11$

$b > 0 \Rightarrow \cancel{2^t > 2^5 \Rightarrow t \in}$ $2^t > 32$ $\quad t \in (5; +\infty)$

$c > 0 \Rightarrow \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$



чистовик 6

$\boxed{\begin{matrix} a\le0 \\ b\le0 \end{matrix}}$ $\begin{matrix} a>0 \\ b\le0 \end{matrix}$ $\boxed{\begin{matrix} a\le0 \\ b\le0 \end{matrix}}$ $\begin{matrix} a\le0 \\ b>0 \end{matrix}$ $\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}}$

потому

1) если $t\le -11$, то $a\le0$ и $b\le0 \Rightarrow$ среднее ≤0

2) если $t\in[0;5]$, то $a\le0$ и $b\le0 \Rightarrow$ среднее ≤0

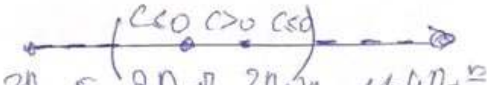
3) если $t\in[11;+\infty)$, то $a>0$ и $b>0 \Rightarrow$ среднее >0

Осталось разобраться с $(-11;0)$ и $(5;11]$

поймем когда интервал $(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n)$ куда попадет

$\frac{2\pi}{3}<5$, т.к. $\pi<\frac{15}{2}=7,5$

$2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{3}\pi>5$, т.к. $\pi>\frac{15}{7}$



$2\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi<11$, т.к. $\pi<\frac{33}{8}\approx4$

$4\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{13\pi}{3}>11$, т.к. $\pi>\frac{33}{13}=2\frac{7}{13}$

$\Rightarrow$ если $t\in(5; 2\pi+\frac{\pi}{3})$, то $a\le0$ и $c\le0 \Rightarrow$ среднее ≤0

если $t\in(2\pi+\frac{\pi}{3}; 2\pi+\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow$ то $b>0$ и $c>0 \Rightarrow$ среднее >0

если $t\in[2\pi+\frac{2\pi}{3}; 11)$, то $a<0$ и $c\le0 \Rightarrow$ среднее ≤0

$\frac{\pi}{3} > 0$; $-2\pi + \frac{2\pi}{3} < 0$

$-2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{3}\pi > -11$, т.к. $\pi < \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}$

$-4\pi + 2\frac{\pi}{3} = -\frac{10}{3}\pi > -11$, т.к. $\pi < \frac{33}{10} = 3,3$

$-4\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{11}{3}\pi \leqslant -11$, т.к. $\pi > 3$

$\Rightarrow$

$c \geqslant 0$ $\quad c < 0 \quad$ $c > 0$ $\quad c \leqslant 0$

$-4\pi + \frac{\pi}{3}$ $\quad -4\pi + \frac{2\pi}{3}$ $\quad -2\pi + \frac{\pi}{3}$ $\quad -2\pi + \frac{2\pi}{3}$ $\quad 0$ $\quad \frac{\pi}{3}$

если $t \in (-11; -4\pi + \frac{2\pi}{3})$, то $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow$ среднее > 0

если $t \in [-4\pi + \frac{2\pi}{3}; -2\pi + \frac{\pi}{3})$, то $\begin{cases} b \leqslant 0 \\ c \leqslant 0 \end{cases}$, то среднее $\leqslant 0$

если $t \in (-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3})$, то $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$, то среднее > 0

если $t \in [-2\pi + \frac{2\pi}{3}; 0)$, то $\begin{cases} b \leqslant 0 \\ c \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ среднее $\leqslant 0$

Ответ: $(-11; -4\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup$

$\cup (2\pi + \frac{\pi}{3}; 2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (11; +\infty)$

чистовик 8

№1

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$B = \frac{(2+1)(2-1)}{1^2\cdot 2^2} + \frac{(3+2)(3-2)}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{(40+39)(40-39)}{39^2\cdot 40^2} =$$

$$= \frac{2^2-1^2}{1^2\cdot 2^2} + \frac{3^2-2^2}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{40^2-39^2}{39^2\cdot 40^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2}\right) = 1 - \frac{1}{40^2}$$

Все сократятся и останется

$$1 - \frac{1}{40^2} < 1 \Rightarrow B < A$$

Ответ: A

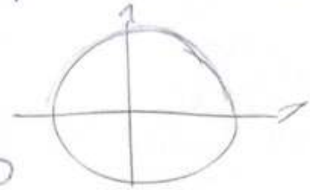
Чистовик 9

№6

мин. максимальное расстояние между корнями $(0;\pi)$

$a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)\,ctg^2x+(2-4a-2a^2)\,ctg\,x+4a=0$

$t=ctg\,x$ $x\in 0;\pi$ $ctg\,x\in R$



$at^3+(2a^2-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$

Заметим, что t может быть равна 1

$t=1$ $ctg\,x=1$ $x=\frac{\pi}{4}$

$a+2a^2-a-2+2-4a-2a^2+4a=0$ ✓

$(t-1)(at^2+(2a^2-2)t-4a)=0$

1) $a=0$, т.е. $(t-1)\cdot(-2t)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

расстояние между корнями $\frac{\pi}{4}$

2) $a\neq 0$

$at^2+(2a^2-2)t-4a=0$ – квадратное уравнение относительно t

$t^2+\left(2a-\frac{2}{a}\right)t-4=0$ $D=4\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+16>0$

$\Rightarrow a\in R \Rightarrow$ всегда два корня

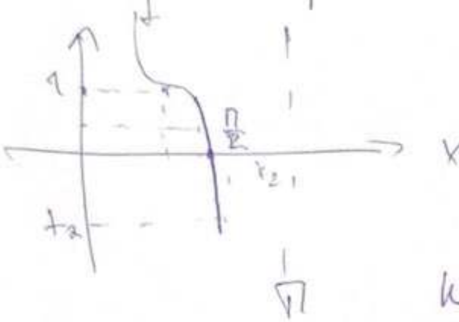
$\begin{cases} t_1\cdot t_2=-4 \\ t_1+t_2=2a-\frac{2}{a} \end{cases}$ – по теореме Виета

Чистовик 10

$\Rightarrow$ корни разных знаков, $t_1>0$ $t_2<0$

Им соответствуют значения $x_1 \in (0; \frac{\pi}{2})$; $x_2 \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

еще есть решение $x_0 = \frac{\pi}{4}$, соответсвующее $t_0=1$



Заметим, что наименьший корень равен $\min(x_0; x_1) \le \frac{\pi}{4}$, а наибольший равен $x_2 > \frac{\pi}{2}$

Значит, макс. расстояние между корнями строго больше, чем $\frac{\pi}{4}$

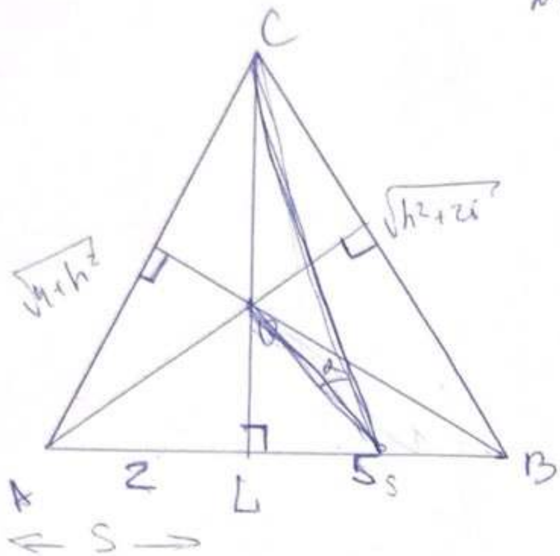
$\Rightarrow$ 1 случай

Ответ: наим. значение наиб расстояния между корнями равно $\frac{\pi}{4}$ и достигается только при $a=0$

Черновик 1

№7

К



$\angle CSQ$ - max

LS - ?

$AL=2$ $LB=5$

$AB=7$

$\angle CSQ$ - ~~[illegible]~~

$$\frac{S_{\Delta ALC}}{S_{\Delta CLB}}=\frac{2}{5} \quad S_{\Delta ALC}=\frac{2}{5}S_{\Delta CLB}$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CLB}+\frac{2}{5}S_{\Delta CLB}=\frac{7}{5}S_{\Delta CLB}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{CL}\cdot AB=\cancel{\frac{7}{5}}\cdot\frac{\cancel{CL}\cdot LB}{\cancel{2}} \quad AB$$

$$\frac{7}{10}CL=\cancel{5A}\ \frac{1}{2} \quad 7CL=\frac{1}{2}\sin\angle ACB\cdot AC\cdot CB$$

$$\sin\angle ACB\cdot AC\cdot CB=7CL$$

$$\sin\angle ACB=\sin\angle(\angle ACL+\angle LCB)=$$

$$=\sin\angle ACL\cdot\cos\angle LCB+\sin\angle LCB\cdot\cos\angle ACL=$$

$$=\frac{2}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}+\frac{5}{CB}\cdot\frac{CL}{CB}=CL\left(\frac{2}{AC^2}+\frac{5}{CB^2}\right)$$

$$7\cancel{CL}=\cancel{CL}\left(\frac{2}{AC^2}+\frac{5}{CB^2}\right)\cdot AC\cdot CB$$

$$7=\left(\frac{2CB^2+5AC^2}{AC^2\cdot CB^2}\right)\cdot AC\cdot CB \quad 7AC\cdot CB=2CB^2+5AC^2$$

$$2CB^2-7AC\cdot CB+5AC^2=0$$

$$D=49AC^2-40AC^2=9AC^2$$

$$CB=\frac{7AC+3AC}{4}=\frac{10AC}{4} \quad CB=AC$$

11 ~~стр.~~

Черновик

1) $\overset{2}{505} \times 4 = 2020$

435×4

$1305 : 4 = 32$, -12, 10, -8, 25

$1305 : 435 = x$

$435 \times 3 = 1305$

1) AB = BC ⇒ треугольник равнобедренный
CL = высота, медиана

$H \quad 2\sqrt{3} + 3$

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1 \quad A = 1$$

$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{36} \qquad \frac{27}{36} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36}$

$\frac{7}{(3 \cdot 4)^2} = \frac{7}{144}. \qquad 144 : 36 = 4 \qquad 32 \times 4 = 128$

$\frac{128}{144} + \frac{7}{144} = \frac{135}{144}$

$3 + 2n \qquad \frac{1+2n}{(n \cdot (n+1))^2} > 1 \qquad \begin{matrix} n \neq 0 \\ n \neq -1 \end{matrix}$ - из условия

$1 + 2n > n(n+1)^2 \qquad 1 + 2n > n(n^2+2n+1)$

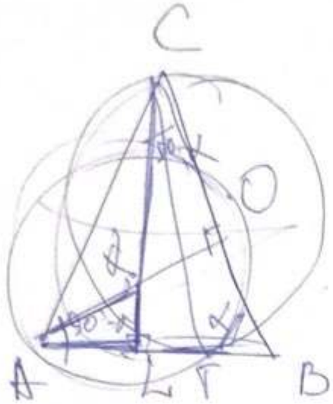
$1 + 2n > n^3 + 2n^2 + n$

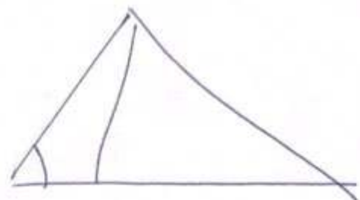
$n^3 + 2n^2 - n - 1 > 0 \qquad x + 2 - 1 - 1 \qquad -1 + 2 + 1 - 1$

$-8 + 8 + 2 - 1$

12

чернови 3



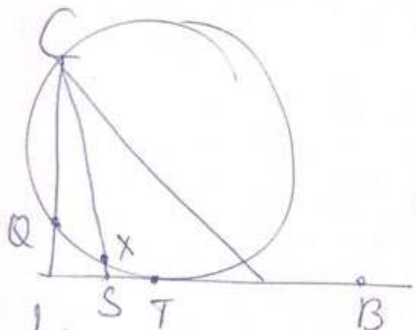


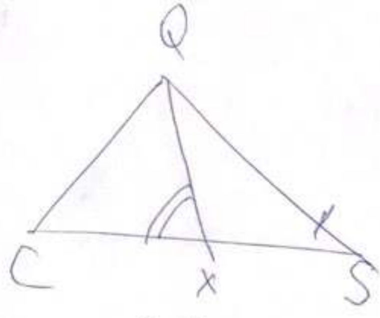
$\triangle AQL \sim \triangle CLB \Rightarrow \frac{LQ}{CL} = \frac{AL}{LB} \Rightarrow$

$LT^2 = LD \cdot LC$

$CL \cdot QL = AL \cdot BL = CL \cdot QL \Rightarrow$

$LT^2 = AL \cdot BL = 10$ $\quad LT = LS = \sqrt{10}$





$\angle XQS = \angle CXQ = \angle CSQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CTQ > \angle CSQ$ $\quad \sqrt{10}$

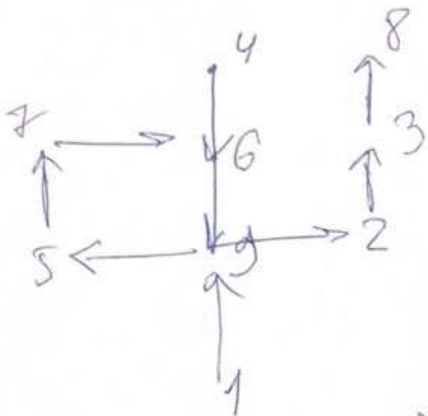
Черновик 4

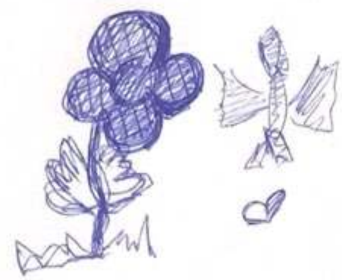
19 38 57 76 95 13 46

69 92

1 - 19   2 - 23   3 - 38   4 - 46

5 - 57   6 - 69   7 - 76   8 - ∅   9 - 92 - 99





$a = t^3 - 12t$ $b = t^4 - 32$ $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{7}{6}$ 13

$$\begin{array}{r} 375 \\ -\ 13 \\ \hline 362 \end{array} \qquad 362 \qquad \begin{array}{r|l} 262 & 3 \\ -24 & \overline{88} \\ \hline 22 & \end{array}$$

$$\cancel{96} \qquad \begin{array}{r} 92 \\ 85 \\ \hline +177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 262 \\ -177 \\ \hline 85 \end{array}$$

Черновик 5

№3

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

$$3)\ \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\sqrt[9]{\frac{1-x^9}{-x}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}} = x$$

$x \neq 0 \quad x \neq 1$

2022

№8

$$B = \frac{(2+1)(2-1)}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{(3+2)(3-2)}{2^2 \cdot 3^2} + \dots +$$

$$+ \frac{(39+38)(39-38)}{39^2 \cdot 38^2} + \frac{(40+39)(40-39)}{40^2 \cdot 39^2} =$$

$$= \frac{2^2-1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2-2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \dots \frac{39^2-38^2}{39^2 \cdot 38^2} + \frac{40^2-39^2}{40^2 \cdot 39^2} =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} \dots + \cancel{\frac{1}{38^2}} - \cancel{\frac{1}{39^2}} + \cancel{\frac{1}{39^2}} - \frac{1}{40^2} =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{40^2} < 1$$