МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Цыганов Аскар Шамилевич**

Класс: **11 класс**

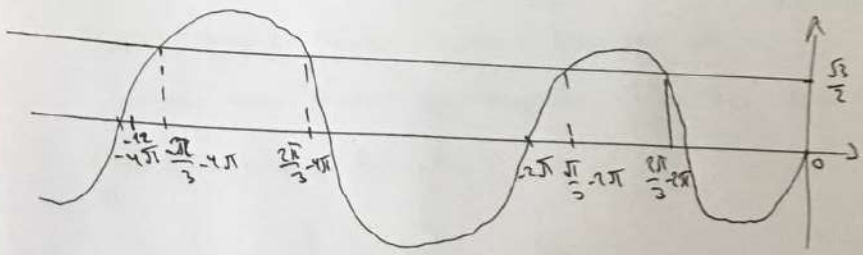
Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	0

ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК



$$t \in \left(\frac{\pi}{3}-4\pi; \frac{2\pi}{3}-4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}-2\pi; \frac{2\pi}{3}-2\pi\right).$$

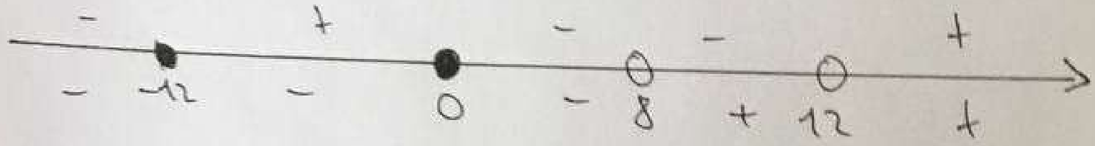
Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{3}-4\pi; \frac{2\pi}{3}-4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}-2\pi; \frac{2\pi}{3}-2\pi\right) \cup$
$\cup \left(8; \frac{2\pi}{3}+2\pi\right) \cup (12; +\infty)$, ни один из концов не входит в множество решений.

N5 ЧИСТОВИК

Если среднее число >0, то и большее >0.

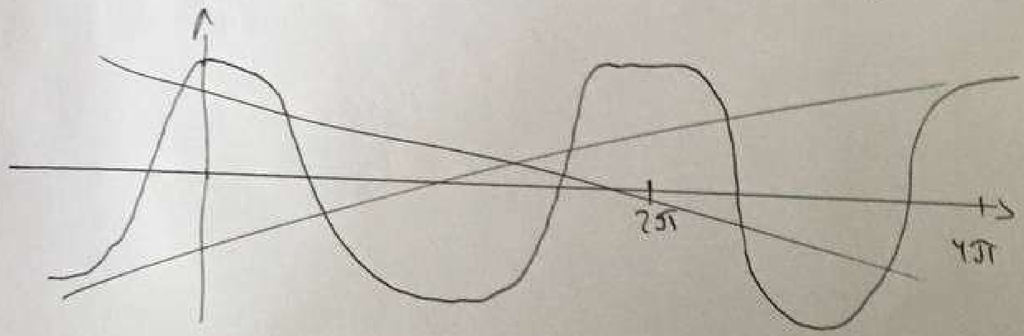
Значит надо найти промежутки, где все >0 или где одно ≤ 0, а остальные >0.

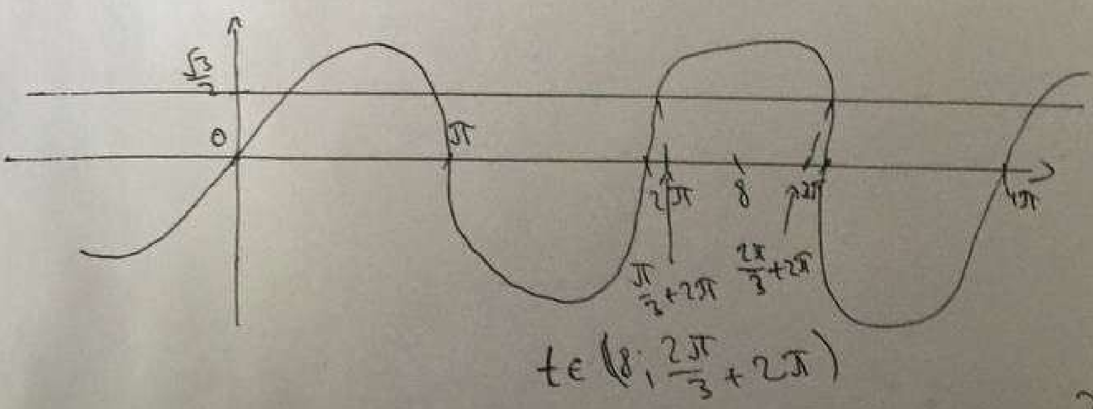
$a>b$



При всех $t>12$ все $+$ годятся, потому что уже есть два нал, все $t<-12$ – не годятся, уже есть два минуса и все $t\in(0;8)$ – не годятся.

Смотрим промежутки от -12 до 0 и от 8 до 12.





$t\in\left(8;\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)$

ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК

$\Rightarrow A > B$

$1 > 1 - \frac{1}{60^2}$

Ответ: $A > B$.

№1 ЧИСТОВИК

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt3}\,\sqrt[3]{\sqrt3-1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{\frac{(4+2\sqrt3)(\sqrt3-1)^2}{4}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(4+2\sqrt3)(3-2\sqrt3+1)}{4}}=\sqrt[6]{\frac{12-8\sqrt3+4+6\sqrt3-12+2\sqrt3}{4}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{4}{4}}=\sqrt[6]{1}=1$$

Докажем, что $B<1$.

$1-B>0$

Заметим, что $1-\frac{3}{(1\cdot2)^2}=\frac{1}{4}$, а $\frac{1}{4}-\frac{5}{(2\cdot3)^2}=\frac{1}{9}$.

Обозначим слагаемые числа B, как $b_1, b_2 \dots b_{59}$.

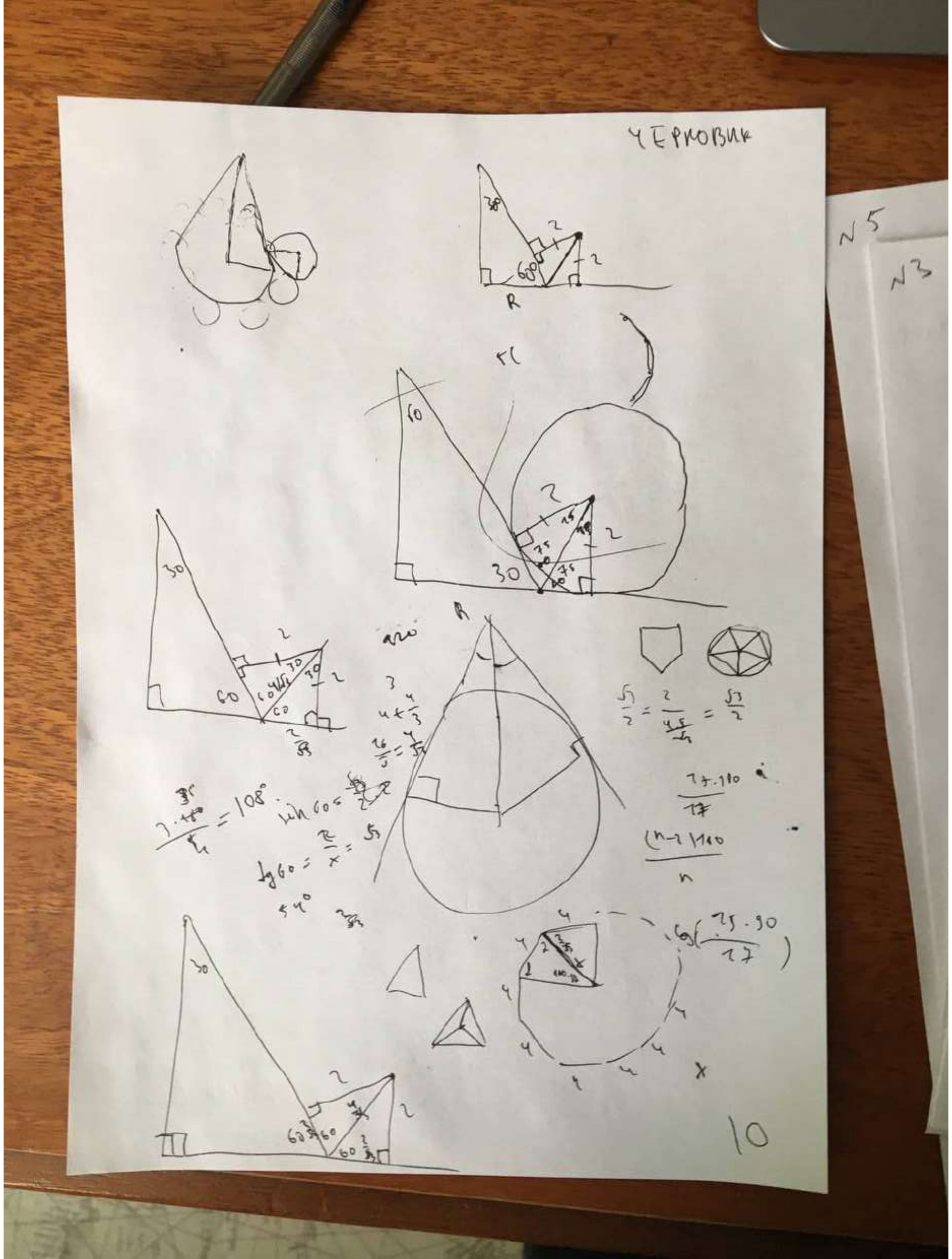
Докажем, что ~~остаток~~ $1-(b_1+\dots+b_k)=\frac{1}{(k+1)^2}$.

Докажем это индукцией. Для b_1 это работает $1-b_1=\frac{1}{4}$.
Пусть работает для произвольного k, тогда $1-(b_1+\dots+b_k)=$
$=\frac{1}{(k+1)^2}$. Заметим, что $b_{k+1}=\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2}$, тогда

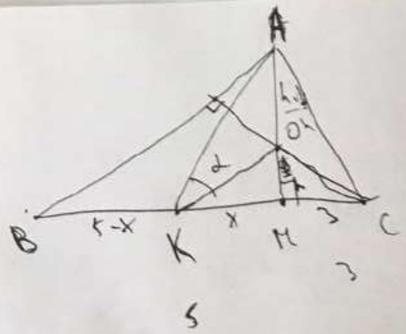
$$1-(b_1+\dots+b_{k+1})=\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{k^2+4k+4-2k-2-1}{(k+1)^2(k+2)^2}=$$

$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{1}{(k+2)^2}$. => шаг индукции доказан =>

=> индукция доказана $1-B=\frac{1}{60^2}$ => $B=1-\frac{1}{60^2}$ =>


ЧЕРНОВИК
10
N5
N3

ЧЕРНОВИК



$AM=h$

$h-\frac{9}{h}=\frac{h^2-9}{h}$

~~tgα~~

$\frac{3}{h}=\frac{?}{3}$

$?=\frac{9}{h}$

$x^2+\frac{81}{h^2}$ $\quad x^2+h^2$

$B(0;0)$ $\quad K(5-x;0)$ $\quad M(5;0)$ $\quad O(5;\frac{9}{h})$

$A(5;h)$

$KA(x;h)$

$KO(x;\frac{9}{h})$

$x\cdot\frac{9}{h}-hx = x(\frac{9}{h}-h)$

$x^2+9=(x^2+\frac{81}{h^2})(x^2+h^2)\cos\alpha$

$x^2+9=(x^2+x^2h^2+x^2\frac{81}{h^2}+81)\cos\alpha$

$x^2+9=x^2\cos\alpha+x^2h^2\cos\alpha+x^2\frac{81}{h^2}\cos\alpha+81\cos\alpha$

$x^2(1-\cos\alpha-h^2\cos\alpha-\frac{81}{h^2}\cos\alpha)=81\cos\alpha-9$

9

$8^2 - (6tg h)^2$ ЧЕРНОВИК

$64 - 36 tg^2 \alpha \geq 0$

$tg^2 \alpha \leq \frac{64}{36}$ $\quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36 tg^2 \alpha}}{2 tg \alpha}$

$tg \alpha \leq \frac{8}{6}$

$-2x^2 + x\delta \quad \frac{8 \pm \sqrt{(8 - 6tg\alpha)(8 + 6tg\alpha)}}{2 tg \alpha}$

$\frac{8}{\frac{2 \cdot 8}{6}} = 3$

$(1 + 2a) t$

$x\left(\frac{9}{h} - h\right) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{h^2}} + \sqrt{x^2 + h^2} \sin\alpha$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36 tg^2 \alpha}}{2 tg \alpha}$

$x\left(\frac{9}{h} - h\right) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{h^2}} \cdot \sqrt{x^2 + h^2} \cdot \sin\alpha$

$x^2 + 9 = \sqrt{x^2 + \frac{81}{h^2}} \sqrt{x^2 + h^2} \cdot \cos\alpha$

$\frac{x\left(\frac{9}{h} - h\right)}{x^2 + 9} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Пусть $h = 1$ $\quad x^2 tg\alpha + 8x + 9 tg\alpha = 0$

$\frac{x\left(\frac{9}{h} - h\right)}{x^2 + 9} = tg\alpha \qquad \frac{8x}{x^2 + 9} = tg\alpha$

$8x = tg\alpha x^2 + 9 tg\alpha$

8

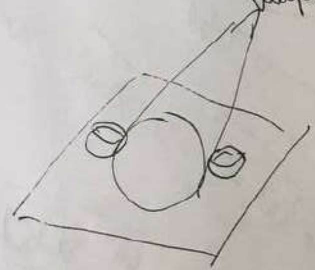
№4

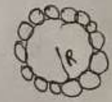
ЧЕРНОВИК

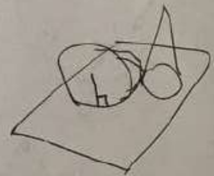
- сечение конуса

17 одинак. r=2 шаров

R-?

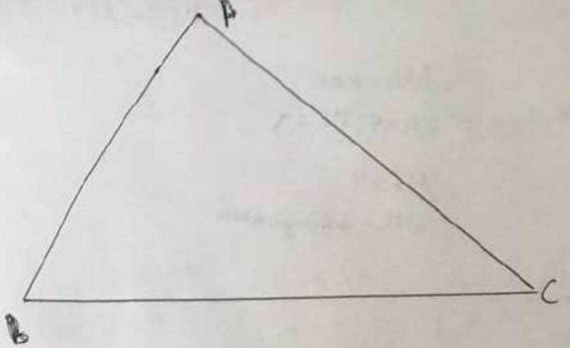






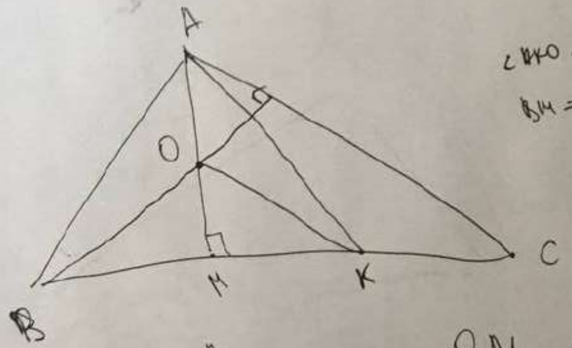
7

ЧЕРНОВИК



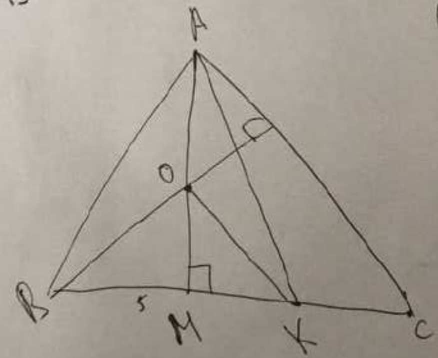
$(180-108)\cdot 5=$

$72\cdot 5=360$



∠AKO – max

BM = 5 , MC=3



BM=5

MC=3

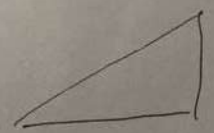
MK – ?

△ABC – острый

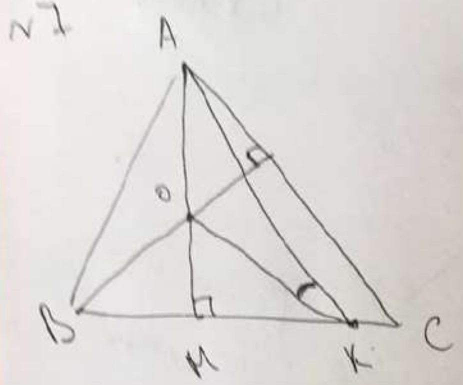
AM – высота

∠AKO – max

K на BC



№7 ЧЕРНОВИК



$\angle AKO$ – max

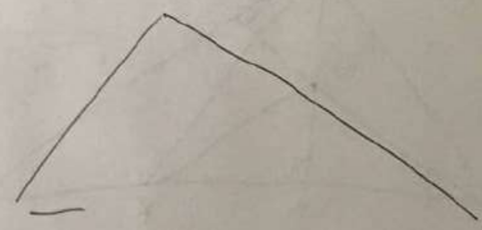
$BM=5$, $MC=3$

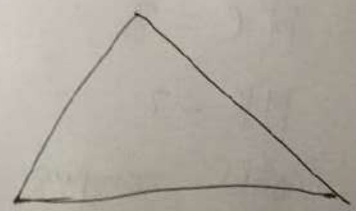
MK – ?

$\triangle ABC$ – остроугольный

23	19
46	38
69	57
92	76
	95

4 69 $\overset{228}{57695}$





5

N3 Чёрновик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f}_{1304\ \text{раза}}(2022)))) = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{+\sqrt[7]{x^7}}}} = x.$$

4

№6 ЧЕРНОВИК

$$a\,ctg^3x + (2a^2 - a - 2)\,ctg^2x + (2 - 4a - 2a^2)\,ctg\,x + 4a = 0$$

$a \in \mathbb{R}$

При каких a расстю максимальное расстояние между корнями $\in (0;\pi)$ ~~при~~ минимально, найти это значение.

3

№5 ЧЕРНОВИК

$a = t^3 - 144t$, $b = 2^t - 256$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Среди из чисел a, b, c > 0, найти t.

$t^3 - 144t$

$t(t^2 - 144)$

$t(t-12)(t+12)$

$2^t = 256$

$2^t = 256$

$t = 8$

14 чист.

10 чер.

2

№1 ЧЕРНОВИК

A =

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \frac{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)}{4} =$$

$$= \frac{12-8\sqrt{3}+4+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cdot 3+2\sqrt{3}}{4} = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$B = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \frac{9}{4^2\cdot 5^2} + \ldots + \frac{117}{58^2\cdot 59^2} + \frac{119}{59^2\cdot 60^2}$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{25}$

$n^2-a=1$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{n^2} - \frac{a}{n^2(n+1)^2}$ $1-\frac{a}{n^2}$

$\frac{1}{3600}$

$\frac{(n+1)^2-a}{n^2(n+1)^2} =$ $\frac{n^2-a}{n^2} - \frac{a+2}{n^2(n+1)^2}$

$\frac{1}{n^2} - \frac{a}{n^2(n+1)^2}$ $\frac{(n+1)^2-a-2}{n^2(n+1)^2} =$

$2n+1-a=0$

$= \frac{n^2-a+2n+1-2}{n^2(n+1)^2} =$

$\frac{(n+1)^2-a}{n^2} = 1$ $= \frac{2}{n(n+1)^2}$

Чистовик

$D \geq 0$

$(h + \frac{9}{h})^2 - (6\,tg\,\alpha)^2 \geq 0$

$6\,tg\,\alpha \leq h + \frac{9}{h}$

$tg\,\alpha \leq \cancel{6h}\ \frac{h}{6} + \frac{3}{2h}$

Т.к. $tg\,\alpha$ – максимально, то и $tg\,\alpha$ – тоже мак.

$tg\,\alpha = \frac{h}{6} + \frac{3}{2h}$

$\cancel{x} = \frac{h + \frac{9}{h} \cancel{\pm \sqrt{}}}{2 \cdot \frac{h}{6} + \frac{3}{2h}}$

$x = \frac{h + \frac{9}{h}}{\frac{1}{3}(h + \frac{9}{h})}$

$x = 3$

Ответ: 3.

ЧИСТОВИК

5) $\cancel{\vec{KA}\ \vec{KO}} =$

скалярное произведение $\vec{KA}$ и $\vec{KO}$ $= x^2 + 9 = \sqrt{x^2+\frac{81}{h^2}}\sqrt{x^2+h^2}\cos\alpha$

векторное произведение $\vec{KA}$ и $\vec{KO}$ $= x(h+\frac{9}{h}) = \sqrt{x^2+\frac{81}{h^2}}\sqrt{x^2+h^2}\sin\alpha$

$$\frac{x(h+\frac{9}{h})}{x^2+9} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{x(h+\frac{9}{h})}{x^2+9} = tg\,\alpha$$

$$x(h+\frac{9}{h}) = x^2\,tg\,\alpha + 9\,tg\,\alpha$$

$$x^2\,tg\,\alpha - x(h+\frac{9}{h}) + 9\,tg\,\alpha = 0$$

~~Для упрощения возьмем $h=9$.~~

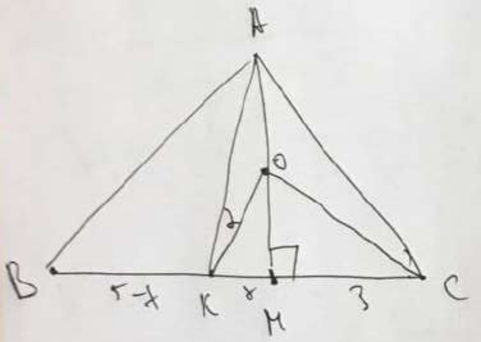
$$x^2\,tg\,\alpha - x\,\cancel{10}^{(h+\frac{9}{h})^2} + 9\,tg\,\alpha = 0$$

$$d = \cancel{100}^{(h+\frac{9}{h})^2} - 36\,tg^2\alpha$$

$\cancel{x = 10 \pm \sqrt{\ }}$

$$x = \frac{h+\frac{9}{h} \pm \sqrt{(h+\frac{9}{h})^2 - (\boxed{36}\,tg\,\alpha)^2}}{+2\,tg\,\alpha}$$

№7 Чистовик



1) Пусть $MK = x$, тогда $BK = 5 - x$ (Точка K лежит на BM, т.к. $BM > MC$)

2) O – точка пересечения высот, AM и CO – высоты $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MOC \sim \triangle MCA \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{OM}{MC} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM = \frac{MC^2}{AM}$, пусть $AM = h \Rightarrow OM = \frac{9}{h}$

3) $KO^2 = OM^2 + KM^2 \Rightarrow KO = \sqrt{x^2 + \frac{81}{h^2}}$

$AK^2 = KM^2 + AM^2 \Rightarrow AK = \sqrt{x^2 + h^2}$

4) Введем систему координат: Ox направим по BC, Oy направим ~~перпендикулярно~~ параллельно AM. ~~O(0;0)~~

$B(0;0) \Rightarrow K(5-x;0)$, $M(5;0)$, $O(5; \frac{9}{h})$, $A(5;h)$

$\vec{KO}(x; \frac{9}{h})$, $\vec{KA}(x;h)$. Пусть $\angle AKM = \alpha$

чистовик

$$= 2\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{1-\cos\left(\frac{360}{17}\right)}}{\sqrt{3}\sqrt{1-\cos\left(\frac{360}{17}\right)}}\right)$$

Ответ: $2\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{1-\cos\left(\frac{360}{17}\right)}}{\sqrt{3}\sqrt{1-\cos\left(\frac{360}{17}\right)}}\right)$

ЧИСТОВИК

5) Так мы получили правильный 17 угольник со стороной 4 и центром в точке O_1.

6) Рассмотрим один из треугольников O_1C_1C - равнобедренный, т.к. O_1 - центр, $CC_1=4$. $\cancel{\angle C_1O_1C}$ $\angle CC_1O_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(17-2)\cdot180}{17} =$

$$= \frac{15\cdot90}{17}. \quad \angle C_1O_1C = 180^\circ - 2\angle CC_1O_1 = \frac{180\cdot17 - 15\cdot180}{17} =$$

$$= \frac{360}{17}.$$

7) По Th косинусов: $CC_1^2 = CO_1^2 + CO_1^2 - 2CO_1^2\cos CO_1C_1$

$$4^2 = 2CO_1^2 - 2CO_1^2\cdot\cos CO_1C_1$$

$$CO_1^2 = \frac{16}{2-2\cos CO_1C_1}$$

$$CO_1^2 = \frac{8}{1-\cos CO_1C_1}$$

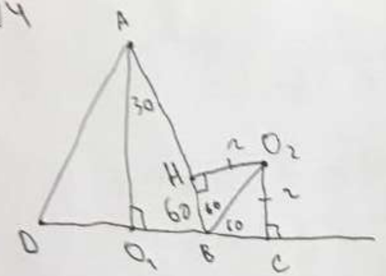
$$CO_1 = \sqrt{\frac{8}{1-\cos CO_1C_1}}$$

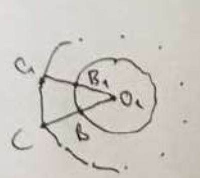
7) $O_1B = CO_1 - CB = 2\sqrt{\frac{2}{1-\cos CO_1C_1}} - \frac{2}{\sqrt3} =$

$$= 2\left(\cancel{\sqrt2 - \sqrt1}\sqrt{\frac{2}{1-\cos CO_1C_1}} - \frac{1}{\sqrt3}\right) =$$

8) $\cancel{= 2\sqrt{\frac{\sqrt6 - 1 + \cos\left(\frac{360}{17}\right)}{\left(1-\cos\frac{360}{17}\right)\sqrt3}}}$

№4 ЧИСТОВИК





1) посмотрим на осевое сечение конуса, совпадающее с сечением касания одной из окружностей конуса.

2) $\angle DAB = 60°$ - по усл., AO_1 - высота, $DA = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1AB = 30° \Rightarrow \angle DBA = 60°$.

3) $O_2H = CO_2 = 2$ - радиусы. $\angle HBO_2 = \angle O_2BC$ (HB и BC - касательные к окр-ти O_2). $\Rightarrow \triangle HBO_2 = \triangle CBO_2 \Rightarrow \angle HBO_2 + \angle O_2BC =$

$= 180° - \angle DBA = 120° \Rightarrow \angle HBO_2 = \angle O_2BC = 60° \Rightarrow \angle HO_2B =$

$= \angle BO_2C = 30° \Rightarrow tg\, CBO_2 = \cancel{\frac{BO_2}{O_2C} = \sqrt{3} \Rightarrow BO_2 = 2\sqrt{3}}$

$= \frac{O_2C}{BC} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}} = BH$; $\cos O_2BC = \frac{O_2C}{O_2B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2B = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

4) Посмотрим на конус и окр-ти сверху, спроецируем все центры на плоскость основания конуса, все центры спроецируются в точки касания. Расстояние между двумя соседними точками $= 4$, т.к. шары касаются друг друга и их радиусы продолжают друг друга.

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$\cancel{f(f(x)) = \quad , 1-f^7(x)}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-f^7(x)}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$$

$$\cancel{f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-f^7(x)}}\right.}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{-\sqrt[7]{\frac{x^7}{1-x^7}}} = -\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-f^7(f(x))}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(-\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}\right)^7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = \frac{x}{1} = x$$

$$f_{1304}(x) = f(f(x)) = f_2(x) = -\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

ЧИСТОВИК

ЧИСТОВИК

Поэтому максимальное расстояние между $\frac{2}{a}$ и $-2a$ =

$= \left|\frac{2}{a}+2a\right| = 2\left|\frac{1}{a}+a\right|$, $\left|\frac{1}{a}+a\right| \geq 2$, равенство достигается

при $a=1$ и $a=-1$, значит в этом случае

наименьшее минимальное расстояние $=4$.

Рассмотрим второй случай $a=0$, у нас было два корня $t_1=1$, $t_2=0$,

наименьшее ~~расстояние~~ максимальное расстояние в этом случае.

$ctg\,x = 0$ $\qquad$ $ctg\,x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{4}$

Ответ: наименьшее ~~расстояние~~ максимальное расстояние $= \frac{\pi}{4}$, при $a=0$

ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК

№6

Пусть $t = \operatorname{ctg} x$

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a -$

Угадываем корень $t = 1$. Поделим столбиком.

$$
\begin{array}{l|l}
-\ at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a & t - 1 \\
\quad at^3 - at^2 & \overline{at^2 + (2a^2 - 2)t - 4a} \\
\hline
\quad -\ (2a^2 - 2)t^2 & \\
\quad\quad (2a^2 - 2)t^2 - (2a^2 - 2)t & \\
\hline
\quad\quad -\ -4at + 4a & \\
\quad\quad\quad -4at + 4a & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$(t-1)(at^2 + (2a^2-2)t - 4a) = 0$

$\cancel{d = (2a^2-2)^2 + 16a^2 = 4a^2 - 8a + 4 + 16a^2 =}$

$a(t-1)(t - \frac{2}{a})(t + 2a) = 0$

На промежутке от 0 до π $\operatorname{ctg} x$ постоянно убывает, если $a > 2$, то $-2a < -4$, а расстояние между $-2a$ и $1 > 5$, аналогично если $a > -\frac{1}{2}$, но $a < 0$, то $\frac{2}{a} < -4$, расстояние между $\frac{2}{a}$ и $1 > 5$, на оставшихся промежутках, одно из этих чисел > 1, а другое отрицательно

ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК
ЧИСТОВИК

№2

Давайте выпишем все двузначные числа, кратные 23 или 19.

19 23
38 46
57 69
76 92
95

Мы знаем, что первая цифра – 4 => единственной возможной второй будет 6. Продолжим такую операцию далее.

„469" получили, теперь есть два случая поставить 2 или 5.

Если продолжим ряд с 2: 469238 – остановимся, у нас нет следующей цифры, т.к. никакое двузначное число с 8 в разряде десятков не делится на 23 или 19, значит далее можно ставить только 5.

„469576". мы получили снова цифру „6". При чем мы доказали, что пришли в 6 из 6 единственным образом. =>
=> число выглядит как 4 6957 6957 6957 ..., нужная нам цифра стоит на 2022 месте, для удобства отбросим 4 и посмотрим, что стоит на последнем месте у получившегося числа. 6957 6957 .. Посмотрим по модулю 4 позицию ~~числа~~ цифры на 2021 месте $2021 \equiv 1 \pmod 4$ =>
=> последняя цифра – 6. Ответ: 6.