МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Червяков Григорий Дмитриевич**

Класс: **11 класс**

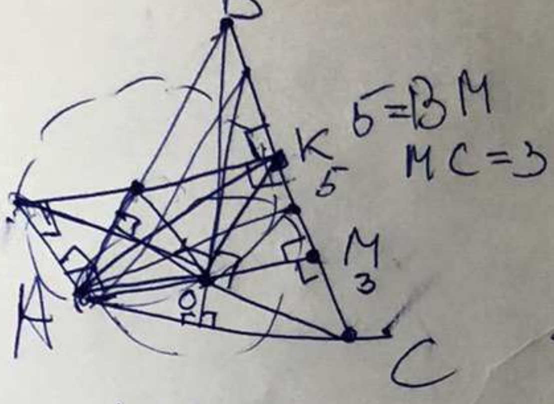
Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

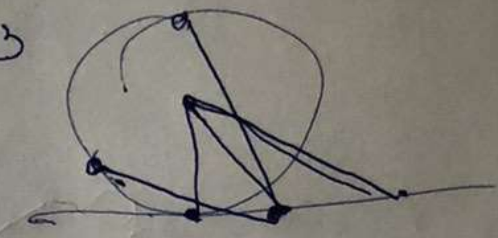
Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	0

7.



5



Точка K лежит на ~~одной~~ окружности с точками A и O при этом BC – касательная к этой окр.

$OK \parallel AB$

Чистовик 3

6. Разложим на множители

1) $(tgx-1)(tgx+\frac{1}{a})(tgx-2a)=0$
при $a\neq 0$

2) при $a=0$
$(tgx-1)(tgx)=0$

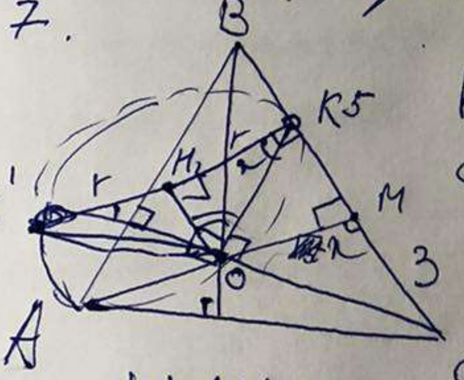
2) при $a=0$ достигается разность $=\boxed{\frac{\pi}{4}}$
корни 0 и $\frac{\pi}{4}$

1) при $a\neq 0$

Из корней: $-\frac{1}{a}$ либо $2a$ $_n$: какое-то из этих слагаемых всегда будет отрицательным и значит в силу монотонности tg корнем будет какое-то число из интервала $(-\frac{\pi}{2};0)$, и значит расстояние будет больше.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a=0$

7.



K – лежит на окружности (т.к. угол должен быть максимальным) с точками A; O и притом BC – касательная

$K'KC \sim OMC \Rightarrow k=2$

значит K' лежит на продолжении высоты CO

$KK' \parallel OM$

$KO \perp CK'$

$OH_2 \perp K'K$ (т.к.)

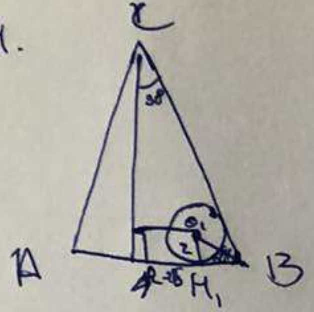
r = ~~…~~ => значит коэффициент подобия = 2 => значит

KM = 3

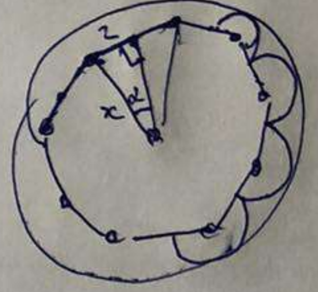
треугольник ~~прямоуг…~~ $OH_2K \sim K'KC$

Чистовик ②

4.



$ctg\,30° = \sqrt{3} \Rightarrow BH_1 = 2\sqrt{3}$



Центры вписанных шаров образуют правильный 13-ти угольник

$\alpha = \frac{\pi}{13}$

$\sin\left(\frac{\pi}{13}\right) = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}$

Ответ: $\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)} + 2\sqrt{3}$

5. Для выполнения условия нужно, чтобы ~~д~~ хотя бы два из трех чисел положительны

$a > 0 \Leftrightarrow t(t-9)(t+9) > 0 \Leftrightarrow t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$

$b > 0$ $\quad 11^t - 11^2 > 0 \Leftrightarrow t > 2$

$c > 0$ $\quad \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$

$t > 9$ подходит т.к $a>0$ и $b>0$, также подходит случай, когда $b>0$ и $c>0$ и когда $a>0$ и $c>0$

1) из $a>0; c>0$ случая получаем, что нам подходит только $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$ (т.к $3<\pi<4$)

2) $2 > \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{25\pi}{6} > 9$ и $9 < \frac{17\pi}{6}$, получим $\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right)$

Если объединить все эти промежутки получается

ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$; $(9; +\infty)$

2. На 23 делятся 23; 46; 69; 92

На 19 делятся 19; 38; 57; 76; 95

После 1 идет 9 а после 9 либо 2, либо 5, но два идти не может т.к. цепочка прерывается поэтому берем 5 после 5 идет 7 после

6 – 9 – 5 – 7 и т.д., поэтому нам нужен остаток от 2020 на 4: Он равен 6

3. $\frac{1}{\sqrt[7]{1-x}}$ $\frac{1}{\sqrt[7]{-x}}$ $\sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[7]{1-2020^7}}}}$

$\frac{1}{}$

$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-2020^7}-1}{\sqrt[7]{1-2020^7}}}$

$\sqrt[7]{(1-2022)(1+2022+2022^2\dots+2022^6)}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ -2021

$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$

$\frac{1-x^7-1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$f(f(f(x)))= \cancel{1-x^7}\ \frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{x^7}}}=$

$=x$

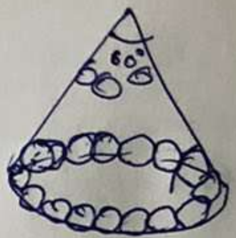
$1304 \equiv 2$

поэтому $f(f(f(\dots(f(x)))))=\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}=g(x)$

$g(2020)=\frac{\sqrt[7]{1-2020^7}}{-2020}$

Черновик ③

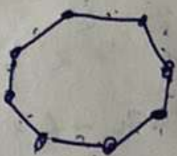
4



tg 30° $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$R - 2\sqrt{3}$



$$\begin{array}{r|l} -360 & 13 \\ 26 & 27, \\ -100 & \\ 91 & \\ 90 & \end{array}$$

5. $t^3 - 81t > 11^t - 121$

t^3

$-\frac{3}{2} \le \sin - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$

$-\infty \le t^3 - 81t \le$

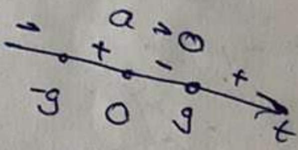
$-14 < 11^t - 121 \le +\infty$

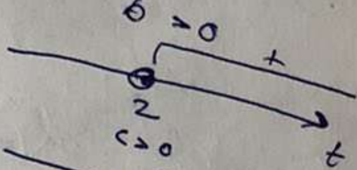
$-121 \le +\infty$

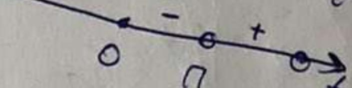
$b = 11^t - 11^2$

$a = t(t^2 - 81) = t(t-9)(t+9)$

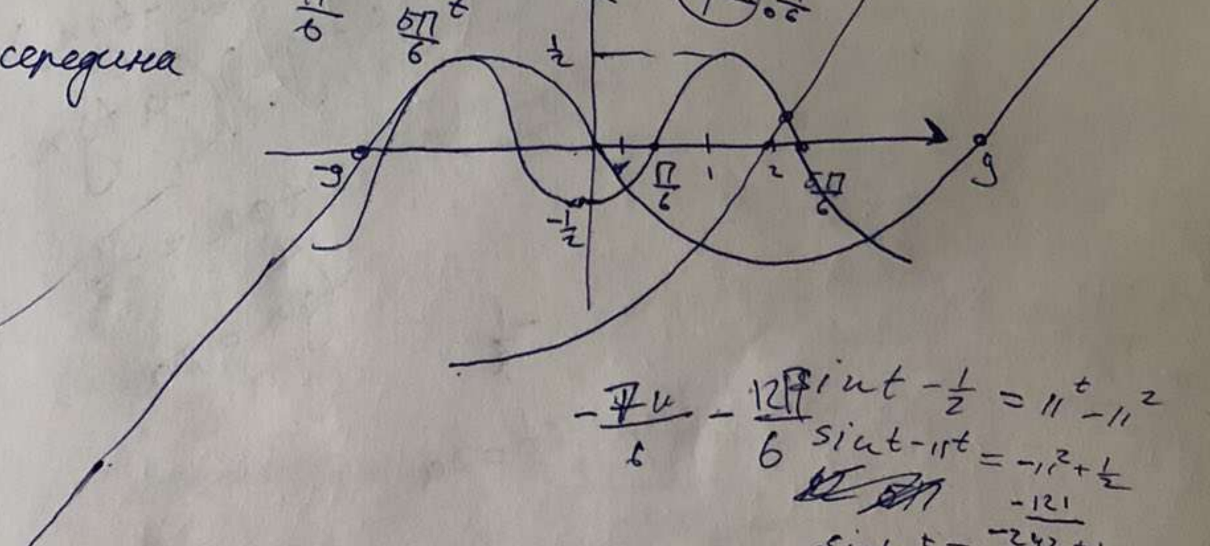
$c = \sin t - \frac{1}{2}$







b - середина при



$-\frac{7\pi}{6} - \frac{12\pi}{6}$

$\sin t - \frac{1}{2} = 11^t - 11^2$

$\sin t - 11^t = -11^2 + \frac{1}{2}$

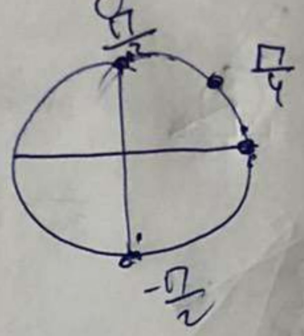
-121

$\sin t - 11^t = \frac{-242+1}{2}$

$\sin t - 11^t = \frac{-241}{2}$

(4)

6. $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tg\,x+2a=0$



$\cancel{a}\; a\,tg^2x(tg\,x-1)-2a(tg\,x-1)$

$(tg\,x-1)(a\,tg^2x-2a)$

$-2a^2tg^2x+2a^2tg\,x$

$tg^2x-tg\,x$

$(tg\,x-1)(a\,tg^2x-\cancel{\quad}-2a$

$p=\frac{\pi}{4}$

$(-2a^2tg\,x)(tg\,x-1)$

$(tg\,x-1)\cdot tg\,x$

$tg^2x-tg\,x=0$

$(tg\,x-1)(a\,tg^2x-2a-2a^2tg\,x+$
$tg\,x)=0$

$tg\,x=0$

$-a\,tg\,x(2a-tg\,x)-1(2a-tg\,x)=0$

$(2a-tg\,x)(-a\,tg\,x-1)=0$

$tg\,x=-\frac{1}{a}$

$tg\,x=2a$

$-\frac{1}{a}$

$-\frac{1}{a}=2a$

Чистовик (1)

1. $A = \frac{3}{1\cdot2^2} + \frac{5}{2^2\cdot3^2} + \ldots + \frac{89}{44^2\cdot45^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9}\ldots$

$\boxed{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}$ $a<b$

Все слагаемые кроме первого и последнего сократятся, поэтому останется $1-\alpha$, где $\alpha > 0$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$ $4-2\sqrt{3} = 1-2\sqrt{3}+3 = (1-\sqrt{3})^2$

$B = \frac{\sqrt[3]{|1-\sqrt{3}|}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$A<B$ Ответ: B

2. На 23: = 23; 46; 69; 92

На 19: = 19; 38; 57; 76; 95

После 1 идет 9, а после 9 либо 2, либо 5, но два не может, т.к. после нескольких цифр прервется цепочка, поэтому берем 5, после 7 – 6 – 9 – 5 и так далее: Цикл с повторением 4 ч., поэтому надо 2020:4 – делится $\Leftrightarrow$ Ответ: 6

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$\boxed{1304 \equiv_3 2}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$

$\Downarrow$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{x^7}}} = x$ $\underbrace{f(f(f(f\ldots f(x))))}_{1304} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x} = g(x)$

$g(2022) = \frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022}$

Черновик ①

1). $A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot44)^2} + \frac{89}{(44\cdot45)^2} \vee 1$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{2\cdot3}$

$3^2\cdot3+5$ 3 $3+3+3+$

3(

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36}$ $4-2\sqrt{3}$ $1-2\sqrt{3}+3$

$(1-\sqrt{3})^2$

$\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} \to \frac{\sqrt[3]{1-3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{2}} = -1$

$\frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{2^2\cdot3^2}$ $\sqrt[3]{|1-\sqrt{3}|}$

$\frac{27+3}{36}$ $\frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{3}-1}$

$\frac{\quad}{1\cdot2^2}$ $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} +$ $\frac{5}{36}$

$A < B$ $1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{31}{36}$

$1-$ $\frac{a}{4} - \frac{b}{9}$

2) $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_6 a_7 \ldots a_{2021}$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ $\frac{9-4}{36}$

$a_1 a_2$

$10 + a_2 \vdots 19$ 95

$a_2 = 9,$ 90 99

$90 + a_3 \vdots 19$ $23\cdot4$

$95 \vdots 19$ $80+12$

92

$a_3 = 2; 5$