МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чимидова Даяна Савровна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

N1. Чистовик 1

$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$ и $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

Заметим, что $A = \sum_{i=1}^{49} \frac{2i+1}{(i\cdot(i+1))^2}$. Докажем по индукции, что сумма $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{(i\cdot(i+1))^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$n=1$: $\sum_{i=1}^{1} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ – доказано

Предположим, что верно для $n-1$

Для n. $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n-1+1)^2} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$

$= 1 - \frac{n^2+2n+1-2n-1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ – доказано

Тогда $A = 1 - \frac{1}{50^2}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2 - 1^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$1 - \frac{1}{50^2} < 1 \Rightarrow A < B$

Ответ: $A < B$

N4

N2

Чистовик 2

Все двузначные числа кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95.

Все двузначные числа кратные 23: 23, 46, 69, 92

Если число начинается с 1, то потом может идти только 9. После 9 может идти либо 5, либо 2.

Если после 9 идет 2, потом должна идти 3, потом должна идти 8, а после 8 идти ничего не может. Значит после 9 может идти 238 только в самом конце.

После 5 идет 7, после 6 идет 9, а после 9 идет 5 и мы получаем цикл (9576). Если после 9 не идет 2, то последней цифрой будет 6, так как 2021-1 равно 2020 и делится на 4, (-1 т.к. первая цифра это 1), а последняя цифра числа 9576 это 6.

Если в конце после 9 идет 238, то последняя цифра будет 8. Мы можем так сделать, т.к. 2021-1-4 = 2016 и ⋮ 4.

Ответ: 6 или 8.

№3.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(2022))))}_{[1303]\text{ раза}}-?$$

Решение: $$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}=\frac{-\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

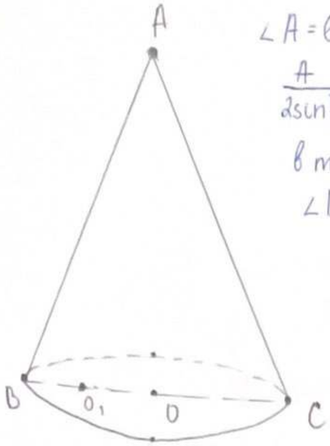
$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}=x$$

$$f(f(f(f(x))))=f(x).$$

То есть применив функцию f n раз, где n делится на 3, получим x

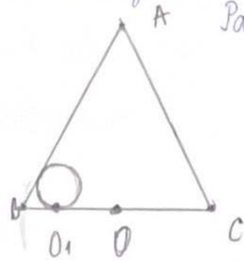
1302 делится на 3. Значит $\underbrace{f(f(\ldots f(2022))))}_{[1303]\text{ раз}}=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-(2022)^5}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-(2022)^5}}$

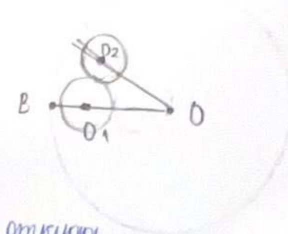


$\angle A = 60^\circ$. т O - сер BC. Дано 19 шаров, радиус $= 3$.

$\frac{A}{2\sin\frac{\pi}{r}}$. Рассмотрим такой шар. Пусть он касается основания в т O_1. Рассмотрим пл. (O_1OA). Поскольку $\angle A = 60^\circ$ и $AB = AC$, то $\angle B = 60^\circ \Rightarrow$ Отсюда $BO_1 = r/tg30^\circ = 3\sqrt{3}$. $= \frac{r}{tg30^\circ}$



Рассмотрим окружность основания



$O_1O_2O_3\ldots O_{19}$ образуют правильный 19-ти угольник, откуда радиус описанной окружности $O_1O_2\ldots O_{19}$ будет: $\frac{O_1O_2}{2\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} = OO_1$

$OB = OO_1 + O_1B = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$

№5 Вистовик 5

$a = t^3 - 144t$, $b = 2^t - 256$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

среднее число положительно $\Leftrightarrow$ хотя бы два из $3^х$ чисел положительны

$2^t - 256 > 0$
$2^t > 256$
$t > 8$

$t^3 - 144t > 0$
$t(t^2 - 144) > 0$
$t(t-12)(t+12) > 0$
$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$
$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$
$t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$

В промежутке $(12; +\infty)$ a и b больше нуля $\Rightarrow$ такие t подходят

$\frac{\pi}{3} + 2\pi < 8$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi > 8 \Rightarrow$ в промежутке $(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi)$ b и c больше нуля $\Rightarrow$ промежуток подходит

$\frac{\pi}{3} + 4\pi > 12 \Rightarrow$ промежуток $(\frac{2\pi}{3} + 2\pi; 12)$ - не подходит

$-12 < \frac{\pi}{3} - 4\pi < 0$, $-12 < \frac{2\pi}{3} - 4\pi < 0 \Rightarrow (\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{2\pi}{3} - 4\pi)$ - подходит, т.к. a и c больше нуля

$\frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow$ не подходит

$\frac{\pi}{3} - 2\pi k < -12$, где $k \geq 3 \Rightarrow$ не подходит.

Ответ: $(\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{2\pi}{3} - 4\pi)$; $(\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi)$; $(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi)$; $(12; +\infty)$

N6. $a \in R$ Чистовик 6

$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + (3-3a-a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$ $(0,\pi)$

$ctg\,x$ на $(0;\pi)$ принимает все действительные значения. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $ctg\,x$ можно заменить на y и решать такое ур.

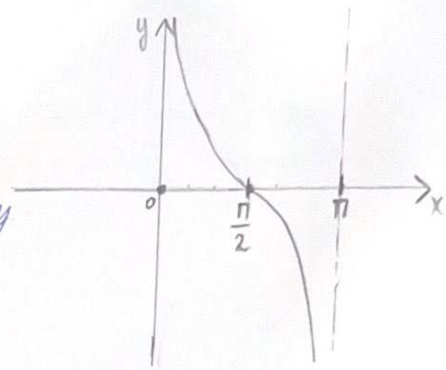
$F(y) = a\cdot y^3 + (a^2-a-3)y^2 + (3-3a-a^2)\cdot y + 3a = 0$

$f(1) = 0$.

$F(y) = (y-1)\cdot(ay^2 + (a^2-3)\cdot y - 3a)$

по дискриминанту: $f(-a)=0$ и $f(\frac{3}{a})=0$

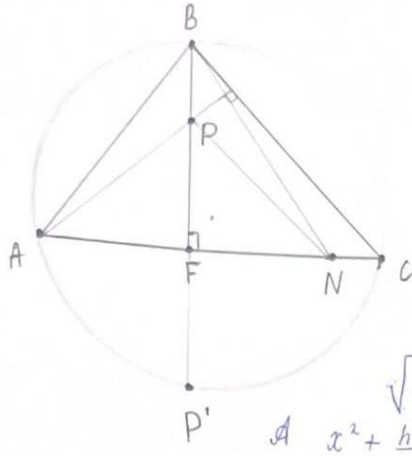
График $y(x) = ctg\,x$:



так как либо $\frac{3}{a}$ либо $-a$ отрицательные, то расстояние между наибольшими корнями не меньше
$|\cancel{arct}\ arcctg\,1 - arcctg\,0| = |\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{4}$
Если $a=0$, то расстояние равно $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

N7. Чистовик 7



$AF=7,\ FC=2.$

$FN=?$

Решение. Пусть $FN=x$. Обозначим $FP=\ell$ и $FB=h$. $\Rightarrow$ Отсюда получим, что $\frac{BP}{\sin\angle PNB}=\frac{PN}{\sin\angle PBN}$ (по теореме синусов Iз BPN). $PN=\sqrt{x^2+\ell^2}$, $BN=\sqrt{x^2+h^2}$ и $\sin\angle PBN = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \Rightarrow \frac{\sin\angle PNB}{BP}=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$ должен быть наибольшим. То есть $\frac{\sqrt{x^2+h^2}\cdot\sqrt{x^2+\ell^2}}{x}$ – наименьший

$\sqrt{x^2+\frac{h^2\cdot\ell^2}{x^2}+h^2+\ell^2}$ – наименьший $\Rightarrow x^2+\frac{h^2\cdot\ell^2}{x^2}$ – наименьший

А $x^2+\frac{h^2\cdot\ell^2}{x^2}\geq 2h\ell$ и $=h\ell$ когда $x^2=\frac{h^2\ell^2}{x^2}$. То есть $\angle BNP$ будет наибольшим, когда $FN=\sqrt{PN\cdot PF}$. Давайте посчитаем $PN\cdot PF$. Знаем, что зеркальная симметрия ортоцентра треугольника относительно стороны лежит на описанной окружности. То есть $FP'\cdot FB=CF\cdot FA$.

$FP'=PF \Rightarrow PF\cdot BF=AF\cdot CF=14.$

$x^2=FN^2=14 \Rightarrow FN=\sqrt{14}.$

Ответ: $\sqrt{14}$

(N 3)

Черновик 8

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$\frac{-\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$f(f(f(\ldots f(2022))))-?$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}}$$

[~~1302~~ 1303] раза

Решение: $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \frac{-\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

$f(f(f(f(x)))) = f(x)$. То есть применив функцию f n раз, где $n \vdots 3$ (делится на 3), получим x.

1302 делится на 3. Значит $\underbrace{f(f(\ldots f(2022)))}_{[1303] \text{ раза}} = f(2022) =$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-(2022)^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-(2022)^5}}$

(№5) Черновик 9

$a = t^3 - 144t$, $b = 2^t - 256$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

среднее число положительно $\Leftrightarrow$ хотя бы два из 3^x чисел положительны.

$2^t - 256 > 0$
$2^t > 256$
$t > 8$

$t^3 - 144t > 0$
$t(t^2 - 144) > 0$
$t(t-12)(t+12) > 0$
$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$
$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$
$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$

В промежутке $(12; +\infty)$ a и b больше нуля. ~~Соответст~~ $\Rightarrow$ такие t подходят.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi < 8$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi > 8 \Rightarrow$ в промежутке $\left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$ b и c больше нуля $\Rightarrow$ промежуток подходит

$\frac{\pi}{3} + 4\pi > 12 \Rightarrow$ промежуток $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi; 12\right)$ — не подходит

$-12 < \frac{\pi}{3} - 4\pi < 0$, $-12 < \frac{2\pi}{3} - 4\pi < 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3} - 4\pi, \frac{2\pi}{3} - 4\pi\right)$ — подходит, т.к. a и c больше нуля.

$\frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow$ не подходит.

$\frac{\pi}{3} - 2\pi k \overset{\text{меньше}}{<} -12$, где $k \geq 3 \Rightarrow$ не подходит.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{2\pi}{3} - 4\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{2\pi}{3} - 2\pi\right)$; $\left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$; $(12; +\infty)$

Черновик II

N1

Черновик 10

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{97}{(48\cdot 49)^2}+\frac{99}{(49\cdot 50)^2} \quad и \quad B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

Заметим, что $A=\sum\limits_{i=1}^{49}\frac{2i+1}{(i\cdot(i+1))^2}$. Докажем по индукции, что сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{(i\cdot(i+1))^2}$ $=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

$n=1$: $\sum\limits_{i=1}^{1}\frac{2i+1}{i^2\cdot(i+1)^2}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$ - доказано

Предположим, что верно для $n-1$

Для n: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{i^2\cdot(i+1)^2}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{i^2\cdot(i+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n-1+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=$

$=1-\frac{(n+1)^2}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{n^2+2n+1-2n-1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{n^2}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ - доказ

Тогда $A=1-\frac{1}{50^2}$

$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2-1^2}}{\sqrt[3]{2}}=$

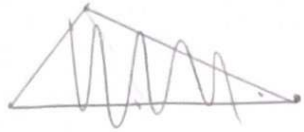
$=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1.$

$1-\frac{1}{50^2}<1. \Rightarrow A<B.$

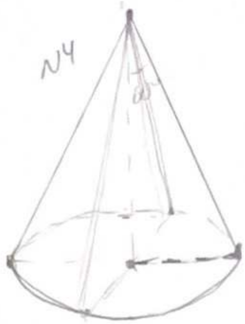
Ответ: $A<B$

3ч 180 мин.

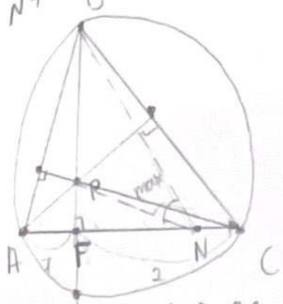
до 20 файлов.



N4



N7



FN=?

AF = 7, FC = 2

AF=7, FC=2 => AC=9

ABN

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

N1.

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{n+2}{(n\cdot(n+1))^2}$$

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots))$ f - 1303 раз

N5. a, b, c - действительные

$x_1 \le x_2 \le x_3$, то число x_2 - среднее из чисел a, b, c. t = ?

$a = t^3 - 144t$ $b = 2^t - 256$ $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.

Черновик 12

~~at~~ $a\,ctg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2)ctgx+3a=0$

$(0;\pi)$

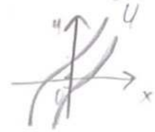
$\cancel{f(x)=actg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2}\ (0,\pi))\ (3-3a-a^2)\ y$

$f(x)=actg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2)ctgx+5a$

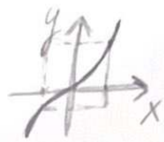
$(3-3a-a^2)y+3a=0$

$\cancel{ctg^3x(a^2-3)}$

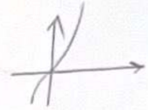
$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\quad (y-1)(ay^2+(a^2-3)\cdot y-3a)=0$

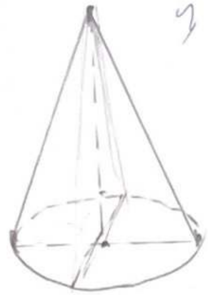


$\begin{array}{r} 19 \\ 23 \\ \hline 57 \end{array}$



$y=x^3$





y

1

$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 437 \end{array}$

$a=t^3-144t,\ b=42^t-256$

$c=\sin t-\frac{\sqrt{2}}{3}$

N 32 D

N2 7X