МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чирков Георгий Дмитриевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Задача №1.

$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{99}{(49\cdot50)^2}$ или $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

Посчитаем $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} =$

$= \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3} = \sqrt[6]{1} = 1$

Теперь посчитаем ~~B~~ A - это сумма чисел вида $\frac{2n-1}{(n-1)^2\cdot n^2}$ от $n=2$ до $n=50$

Покажем, что $A<1$, для этого будем находить разность 1 и ~~A~~ числа A, в которой взяты первые x членов. Вначале $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, затем,

$\frac{1}{2^2}-\frac{5}{2^2\cdot3^2}=\frac{3^2-5}{2^2\cdot3^2}=\frac{1}{3^2}$, тогда на i-шаге $\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{2n-1}{(n-1)^2\cdot n^2}=\frac{n^2-2n+1}{n^2\cdot(n-1)^2}=\frac{1}{n^2}>$

значит предел при $n\to\infty$ числа $A\to1$, ну ~~зна~~ а значит, что наше $A<1$.

Ответ: число B больше A.

Задача №2.

Посмотрим все двузначные числа, делящиеся на 19 или 23.

$\vdots 19$ $\overline{00}, \overline{19}, \overline{38}, \overline{57}, \overline{76}, \overline{95}$

$\vdots 23$ $\overline{00}, \overline{23}, \overline{46}, \overline{69}, \overline{92}$

У нас первая цифра - 9, заметим, что у нас не встретится нулей, т.к. будет где-то $\overline{a0}$, где $a\neq0$, а таких чисел, кратных 19 или 23 нет, также у нас ~~за~~ есть 2 ветки, после 9 может идти либо 5, либо 2, после $5\to7\to6\to9$, однозначно определяется, или же ~~$9\to2\to3$~~ $9\to2\to3\to8$ X, после 8 ничего не идёт, ну значит, что у нас всё время идут циклы 9576, а вконце, когда будет стоять $k\leq4$ цифр из цикла, может случиться цикл 9238, $2022\equiv2\,(mod.4)$ => будет вторая цифра из цикла => вконце стоит либо 5, либо 2.

Ответ: Это число оканчивается либо цифрой 5, либо 2.

Задача №3. Чистовик Страница 02

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

Найти выражения $f(f(x))$; $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=$

$$=\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}=\frac{\sqrt[5]{x^5-1}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5-1}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5-x^5+1}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}=x$$

$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} \Rightarrow f(f(f(f(x))))=f(x)$, а значит, что взятая 1303 раз функция эквивалентна тому, что взяли 1 раз $f(x)$, т.к. $1303\equiv 1 \pmod 3$, а у нас цикл из 3, т.к. $f(f(f(x)))=x$

$\Downarrow$

Надо найти $f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$.

Задача №6.

$$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + (3-3a-a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$$

$$a\,ctg^3x + (a^2+3a-3)\,ctg^2x - 4a\,ctg^2x - (a^2+3a-3)\,ctg\,x + 3a = 0$$

$$(a^2+3a-3)\,ctg\,x(ctg\,x-1) + a(ctg\,x-1)(ctg^2x - 3ctg\,x - 3) = 0$$

$$(ctg\,x-1)(a^2ctg\,x + \cancel{3a\,ctg\,x} - 3ctg\,x + a\,ctg^2x - \cancel{3a\,ctg\,x} - 3a) = 0$$

$$(ctg\,x-1)(ctg\,x+a)(a\,ctg\,x-3) = 0$$

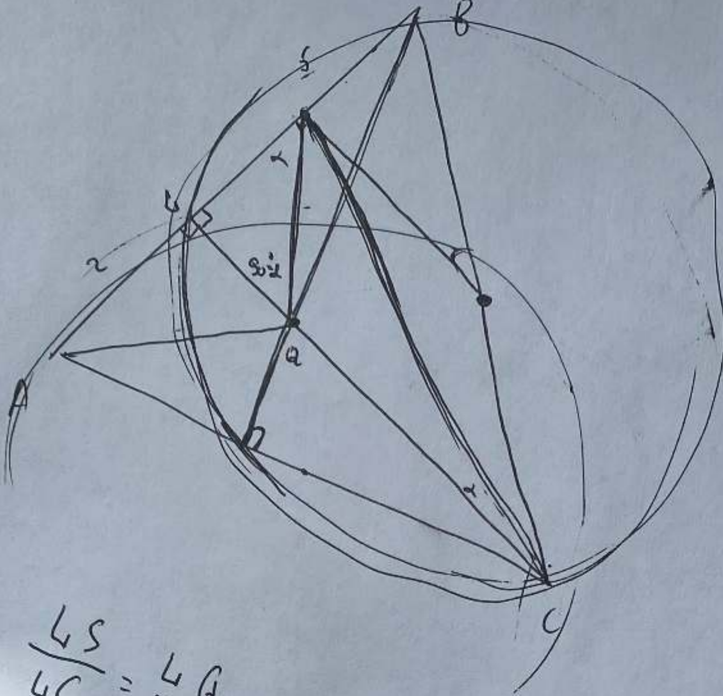
$$\begin{cases} ctg\,x - 1 = 0 \\ ctg\,x = -a \\ ctg\,x = \frac{3}{a} \end{cases} \leftarrow \text{корни} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = arcctg(-a) \\ x = arcctg\left(\frac{3}{a}\right) \end{cases}$$, пусть $a \neq 0$, тогда

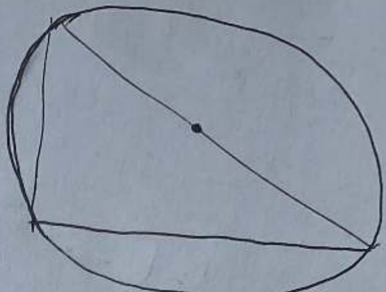
у нас, либо $-a$, либо $\frac{3}{a} < 0 \Rightarrow x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ max. расстояние больше $\frac{\pi}{4}$, т.к. есть корень $\frac{\pi}{4}$. В случае, когда $a=0$, у нас 2 корня $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ это и будет ~~минимальное~~ максимальное расстояние:

$S = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ при $a=0$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a=0$

Черновик





$\sqrt{A^2-25}\cdot\sqrt{G^2-}$

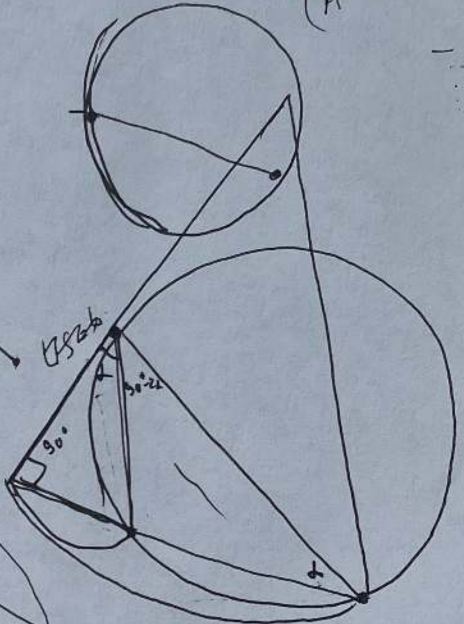
$(A^2-25)\cdot(G^2-25)$

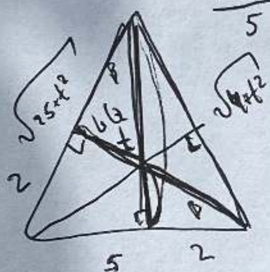
$$\frac{LS}{LC} = \frac{LG}{LS}$$

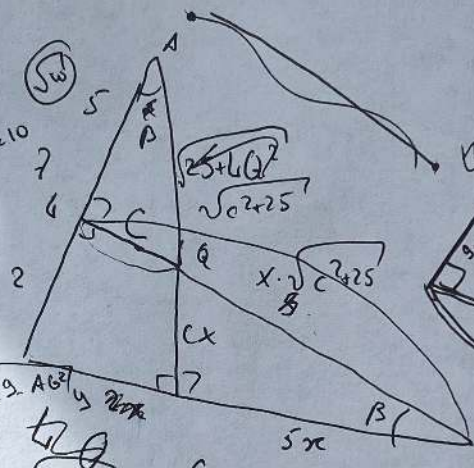
$LS^2 = LQ\cdot LC$

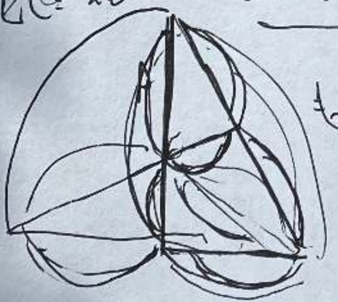
$LC\cdot 7 = S_{ABC}$

$\frac{LC}{5} = \frac{2}{LQ}$ =10









$$\frac{C + x\cdot\sqrt{c^2+25}}{2} =$$

QL

5+2

$LC\cdot 7 = S_{ABC}$

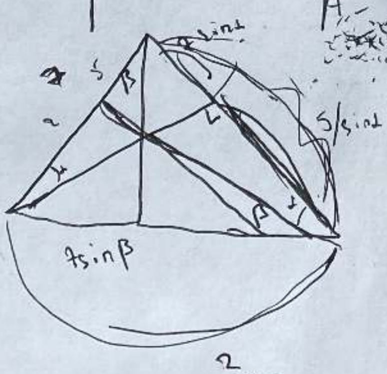
$(AQ+QG)\cdot BC = LC\cdot 7$

$$\frac{2}{y} = \frac{y+5x}{7}$$

$LQ^2 + QC\cdot LQ = LQ^2 + AQ\cdot QG = AQ^2 - 25 + AQ\cdot QG$

$A^2 =$ $A^2 =$

$LQ\cdot LC$



$$\frac{5-7\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{2-7\sin^2\beta}{\sin\beta}$$

$$QC^2(1-\sin^2\alpha) = \frac{5-7\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$QC^2 = \frac{5-7\sin^2\alpha}{5\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}$$

$$QC^2 = \frac{2-7\sin^2\beta}{\sin\beta\, 2(1-\sin^2\beta)}$$

$$QC^2 = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{2\sin\alpha}{5(1-\sin^2\alpha)}$$

Черновик

$x_1 \leq x_2 \leq x_3$

$a = t^3 - 121t$; $b = 2^t - 32$; $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a t (t+a) + 3$

$+3a - 3t$

$a t^2 a^2 t + 3a - 3t$

$a t^2 + (a^2 - 3) t + 3a = 0$

$a, b > 0$

$t(t-11)(t+11) > 0$

$-11 \quad 0 \quad 11$

$t = \frac{-a^2+3 \pm \sqrt{a^4 - 6a^2 + 9 - 12a^2}}{2a} =$

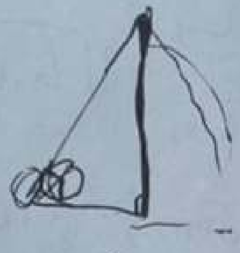
$t \in (-11; 0), (11; +\infty)$

$= \frac{-a^2+3 \pm \sqrt{a^4 - 18a^2 + 9}}{2a}$

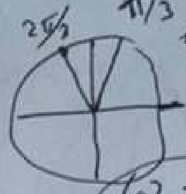
$(a^2-3)^2 - 12a^2$

$2^t - 32 > 0$

$t > 5$



$2\pi/3 \quad \pi/3$



$c > 0 \quad \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

$(a^2 - 3 - 2\sqrt{3}a)$

$(a^2 - 3 + 2\sqrt{3}a)$

$t > 11$ - подходит

$\frac{\pi}{3} \approx 1 \ldots \quad \frac{2\pi}{3} \approx 2 \ldots$

$\frac{7\pi}{3} \quad \frac{8\pi}{3}$

$\frac{3{,}14}{3} = 1 + \frac{0{,}14}{3} \approx 0{,}046 \ldots$

$t > 11$ подходит

$7 \ldots \quad 8 \ldots$

$t \in \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$

13π

$-\frac{4\pi}{3}, \quad -\frac{5\pi}{3}; \quad -\frac{4\pi}{3}$

$\frac{360}{13} = 2\pi$

$20 \cdot 18$

$\frac{\pi}{4}$

$(-a^2+3)$

$\frac{2\pi}{13}$

$-5 \quad -4 \quad 10 \cdot \approx 0{,}046$

$t \in \left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right), \; t \in \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)$

$-\frac{11\pi}{3} \quad -\frac{10\pi}{3}$

$a \operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3) \operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2) \operatorname{ctg} x + 3a = 0$

$\frac{-a^2+3 - a^2+3+t}{2a} \quad \sin x \neq 0$

$x \in (0; \pi)$

$a t^3 + (a^2 - a - 3) t^2 +$

$\frac{3 - a^2 + a^2 - 3 - t}{2a} = \frac{-a^2+3+t}{a}$

$\operatorname{ctg} x \in$

$a(t^3 + 3) + t$

$(t = \frac{\pi}{2})$

$a \operatorname{ctg}^3 x + (a^2 + 3a - 3) \operatorname{ctg}^2 x - 4a \operatorname{ctg}^2 x - (3 + 3a - a^2) \operatorname{ctg} x + 3a = 0$

$\operatorname{ctg}\, t\,(t(a^2+3a-3) \cdot (t-1)(t-1)(a+t)(at-3) = 0$

$a(t-1)(t^2 - 3t + 3) = \cancel{a t (t+a) + 3(a+t)}$

$t = \frac{\pi}{4}$

$t = -a$

$t^3 - 4t^2 + 3$

$t = \frac{3}{a}$

$(t-1)(t(a^2+3a-3) + a(t^2 - 3t + 3)) = 0$

$(t-1)(t^2 - 3t - 3)$

$a = 0$

$(t-1)(at(t+a) + 3(a-t)) = 0 \quad a = t + k$

$t = 1$ - корень $\quad \frac{\pi}{4}$ - корень

$(t-1)((t+k)t + (2t+k) + 3k) = 0$

at^2

$3a$

$+3t$

$at(a+t) - 3(a+t)$

$(-1) \quad (3a), \; t^2 + 3t$

$-a(a-1) - 3(1-a)$

$(a-1)(3+a) \quad t^2 + 3t$

$(t-1)(at^2 - 3a + a^2 t - 3t)$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}} = t$ Черновик

$\frac{1}{1-2022^5} = t^5$

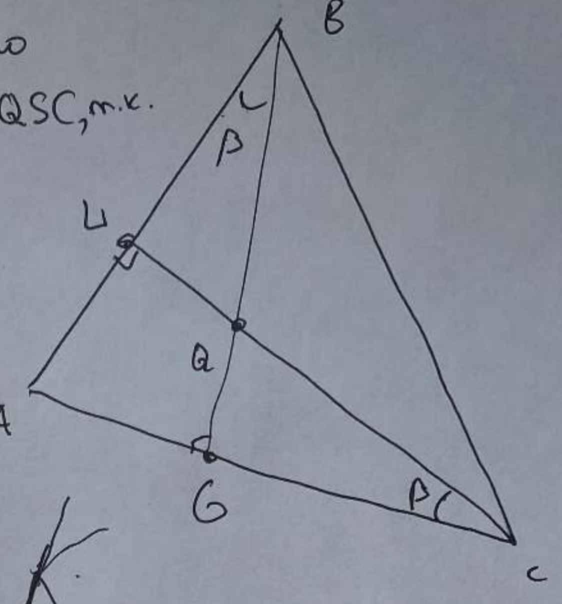
$1 = t^5 - (2022t)^5$

$1^5 = t^5 - 2022^5 \cdot t^5$ $t^5 \cdot \left(\frac{1^5 - 2022^5}{1^5}\right)$

$\frac{1}{1-2022^5}$

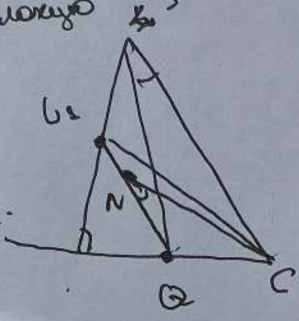
$t =$

Задача №7.



Точка S должна быть такая, что BA - касательная к опис. окр. $\triangle QSC$, т.к. известно, что ~~любой угол на хорду~~ любой другой угол будет меньше.

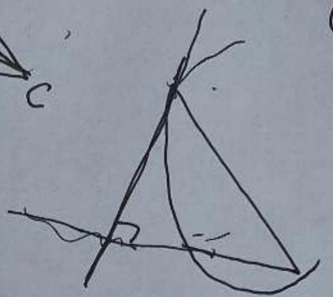
Пусть нет, возьмём плохую точку S_1 - она вне окружности, возьмём N на L_1Q - пересечение с окр.

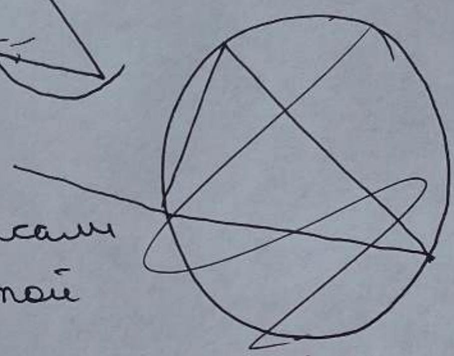


$\angle QSC = \angle QNC$, а

$\angle QL_1C < \angle QNC$, т.к.

$\angle QNC = \angle QL_1C + \angle L_1CN$.





В случае, когда AB - кас., уже

$LS^2 = LQ \cdot LC$, т.к. мы просто записали степень точки L относительно этой окружности.

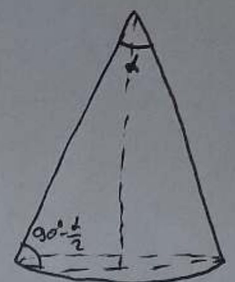
Найдём $LQ \cdot LC$ $\quad \angle ABG = \angle ACL$, т.к. $\angle BAG = \angle LAC$, и углы по 90°.

$\triangle ALC \sim \triangle BLQ$ по углам $\Rightarrow \dfrac{LC}{LB} = \dfrac{AL}{LQ} \Rightarrow LQ \cdot LC = LB \cdot LA = 2 \cdot 5 = 10$

$LS = \sqrt{10}$.

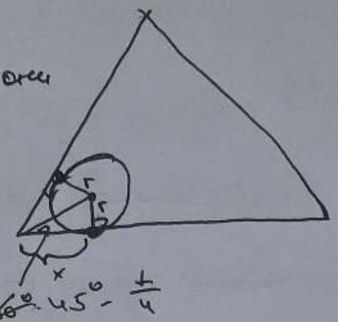
Ответ: $LS = \sqrt{10}$.

Задача №4.



Рассмотрим один вписанный шар, у нас ~~точки~~ у нас есть 2 точки касания, ~~что лежат в плоскости~~

Рассмотрим сечение, в котором они лежат

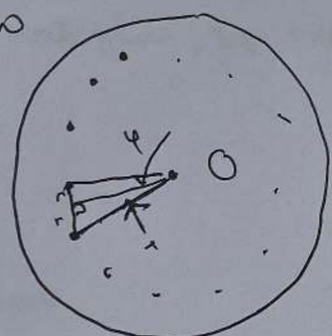


Тогда у нас

$x = \frac{r}{tg(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}$

Теперь заметим следующее; рассмотрим конус сверху.

и возьмём точки касания шаров с дном, это также проекции центров шаров => расстояния между соседними точками — 2r, т.к. между центрами, касающихся шаров, — 2r. получается вписанный 13-угольник.



~~Най~~ $\angle\varphi = \frac{2\pi}{13}$, найдём радиус этой окр..

Это $\frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\pi}{13}}$ => радиус окружности основания —

$= \frac{r}{\sin\frac{\pi}{13}} + \frac{r}{tg(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} = r\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}} + \frac{1}{tg(45^\circ-\frac{\alpha}{4})}\right) \Rightarrow r\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}} + \frac{1}{tg\,30^\circ}\right); \alpha = 60^\circ$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}} + \sqrt{3}\right)$

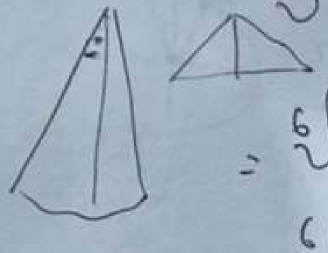
Ответ: $R = 2\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}}\right)$.

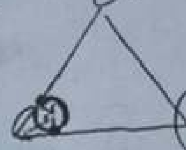
Черновик 1 2 3 4 5 6 7

+ + + + + + + + +

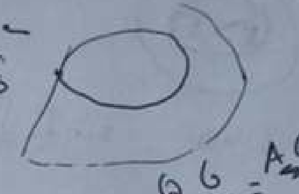
$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$ или $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot$





$(\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$



$= \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$

$= \sqrt[6]{4-3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = 1$

$\frac{7}{39\cdot 16}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{36}$

$\frac{QG}{\sin\alpha} = AG$

$\sin\alpha = \frac{QG}{AG}$

$\sin\beta = \frac{NQ}{QB}$

$\frac{37}{4}$ $3 + \frac{5}{9} +$

$\frac{20}{36}$ $\frac{27}{36}$ $\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{100}$ 24

$\frac{3}{4} + 5$

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2}$

$4\cdot 9 = 36$

$\frac{9\cdot 25 - 9\cdot 3^2}{4\cdot 25\cdot 9} = \frac{9}{25}$

$\sin\alpha$ $\sin\beta$

$\frac{QG}{AG}$ $\frac{NQ}{QB}$

$\frac{27}{36}$ $\frac{9}{100}$

$\angle CSQ$

$QG\cdot QB$ $NQ\cdot AG$

$\frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}$ 1

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{36}\cdot\frac{7}{}$ $\frac{7}{9\cdot 25}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1+x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-\frac{1}{x^5}}}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{12}$

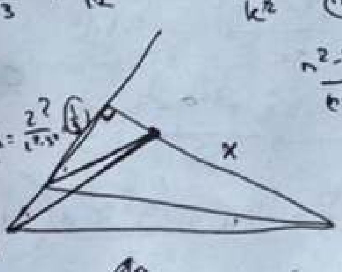
$\frac{1}{k^2}$ $\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}$

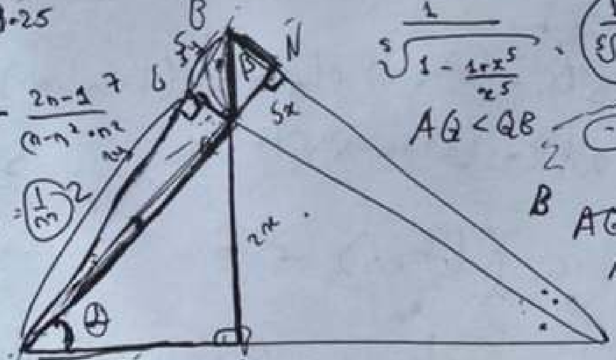
$AQ < QB$ $-x$

$\frac{n^2-2n+1}{(n-1)^2 n^2} = \frac{1}{n^2}$

$1 - \frac{3}{1\cdot 2^2} = \frac{1}{1\cdot 2^2}$

$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{3^2-5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{2^2}{2^2\cdot 3^2}$





$AQ < BQ$

$AG < BN$

$\frac{1}{3^2} - \frac{7}{3^2\cdot 4^2} = \frac{4^2-7}{3^2\cdot 4^2} =$

$\frac{AG}{BN} = \frac{\sin\angle ABG}{\sin\angle BAN} = \frac{AQ}{BQ} < 1$

9 5 7 6 9 5 7 6

$\frac{QG}{QN} = \frac{\sin\angle ACL}{S\dots} = \frac{AL}{LB} = \frac{2}{3}$

19 38 57 76 95

23 46 69 92

9238

$2022 \% 4 = 2$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^5}}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1-x^5}{x}}$

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \frac{1}{(-x)\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}}$

$= \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{x^5}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-x^5}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5-x^5-1}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = -x$

Задача №5.

$a = t^3 - 121t$; $b = 2^t - 32$; $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b > 0$ при $t > 5$

$a > 0$ при $t \in (-11; 0)$ и $(11; +\infty)$, т.к. $t^3 - 121t = t(t-11)(t+11)$

$c > 0$ при $\cancel{t=}$ $t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

Чтобы среднее было > 0, надо чтобы хотя бы 2 числа из a, b, c было больше нуля.

$a, b > 0$ при $t > 11$

на отрезке $t \in (5; 11)$ $\cancel{b \leq 0}$ $a < 0$, а $b > 0$, найдём, где $c > 0$,

$\cancel{\frac{\pi}{3} + 2\pi}$ $7 < \frac{\pi}{3} + 2\pi < 8$ $8 < \frac{8\pi}{3} < 9$, $\frac{13\pi}{3}$ уже > 11.

подходит $t \in \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$.

При $t \in [0; 5]$ $b \leq 0$; $a \leq 0$ - не подходит

При $t \leq -11$ уже $b < 0$; $a \leq 0$ - не подходит

Остался ~~отрез~~ интервал ~~(-11)~~; $(-11; 0)$.

$c > 0$ ~~в~~ при $t \in \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)$, а также $\left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right)$., т.к. $-\frac{11\pi}{3} < -11$,
но $-\frac{10\pi}{3} > -11$

Ответ: $t \in \left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right), \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right), (11; +\infty)$.