МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чобанян Самвел Хачатурович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	15	15	15

Черновик

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-1-x^9}} \qquad \frac{1-x^9-1}{2-x^9} \qquad 2-x^9$$

$$f^1 =$$

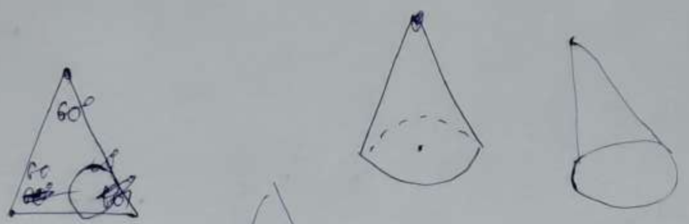
$$f^{2k} = -\sqrt[9]{1-x^9}, \quad f^{2k+1} = \sqrt[9]{\frac{2-x^9}{1-x^9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{2-x^9}} \qquad \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{2-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9}{2-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{2-x^9}{1-x^9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{2-x^9}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-1}{1-x^9}}} = -\sqrt[9]{1-x^9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}} = x$$

1 2 3 конус

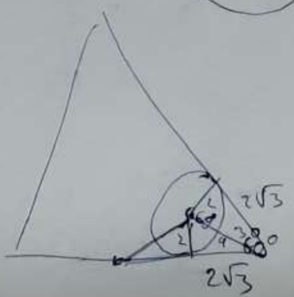


$\sin(x+\pi)$

$-\sin x$

$-\cos x$

$\cos(x+\pi)$



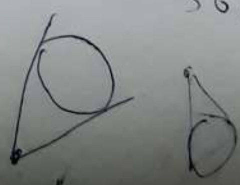
$16 = 4 + 12$

$4 + 4 \cdot 3 = 16$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

13

360



$\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1+x^2}$

$\boxed{19 : ~~17~~}$ Черновик

A $

$\frac{2n+1}{\cancel{2n}}$ $\frac{2n+1}{}$

$1\ 2;\ 2\ 3;\ 3\ 4;\ \ldots;\ 48\ 49;\ 49\ 50$ (3, 5, 7, 97)

$\frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2} \geqslant \frac{(2n+1)\cdot 4}{(2n+1)^2} = \frac{4}{(2n+1)^3}$

$\sqrt{n(n+1)} \leq \left(\frac{n+(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^4$

$4-2\sqrt{3}$

$(1-\sqrt{3})^2$

$(\sqrt{3}-1)^2 = 3-2\sqrt{3}+1$

$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$4\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\right)$

$\frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \cancel{(2n+1)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{}$

$\frac{1}{1^2} -$

$2n+1$ $\quad$ $\frac{2n+1}{}$

2022 $\quad a_1 \ldots a_{2022}$

$19, 38, 57, 76, 95$

$23, 46, 69, 92$

$19 |$ или $23 |$ $\quad \overline{a_i a_{i+1}} = 10a_i + a_{i+1}$ $\quad \times 9238$

$\underline{957692}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\sqrt[9]{1-x^9}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-(1-x^9)}} = \frac{1}{\sqrt[9]{x^9}} = \frac{1}{x}$ a_{i+1}

9238 $\quad a_i = 9$, $i \leq 2018$

19 2021 a_{2022} $\quad$ 18 19 20 21

$\underline{9576}, 92$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9-1}{x^9}}} = \frac{x}{\sqrt[9]{x^9-1}}$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{x^9}{x^9-1}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-1}{x^9-1}}} = \sqrt[9]{x^9-1}$ $\quad$ 238

$tg(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ Черновик

конус

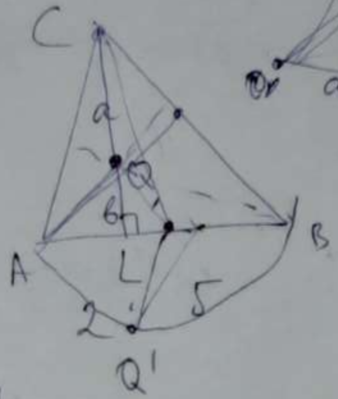
$\frac{\pi}{6} - 4\pi$, -10, $\frac{5\pi}{6} - 4\pi$

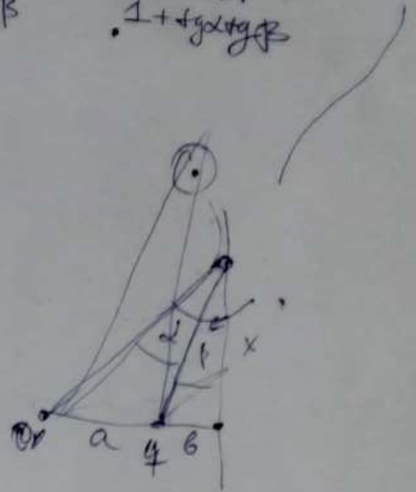
$-12, \ldots$ $-9, -$

$x^2 - x^2\cos = 2$

$x^2(1-\cos) = 2$

$2x^2 - 2x^2\cos\delta = 4$





$tg\beta = \frac{b}{x}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{x}$

$tg(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\sin x\cos y - \cos x\sin y}{\cos x\cos y + \sin x\sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}}{1 + tg\, tg} = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x\, tg y}$

$x, -x$

x, x

cos cos

$tg\alpha = \frac{\frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x}\cdot\frac{a+b}{x}} = \frac{ax}{x^2 + b(a+b)}$

$(0, a+b)$, $(5, 0)$ $\boxed{n = -1}$

$\boxed{-\frac{a+b}{5}x + a+b}$

a

$(0, b)$, $(-2, 0)$

$\boxed{\frac{b}{2}x + b}$

$\frac{a+b}{5}\cdot\frac{b}{2} = +1$

$(a+b)b = +10$

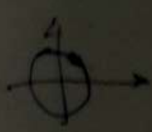
$ab + b^2 = -10$

$a = \frac{-10 - b^2}{b} = \boxed{-\frac{10}{b} - b}$

$\left(\frac{ax}{x^2+10}\right)' = \frac{a\cdot(x^2+10) - ax\cdot 2x}{} = \frac{ax^2 + 10a - 2ax^2}{} = \frac{-ax^2 + 10a}{}$

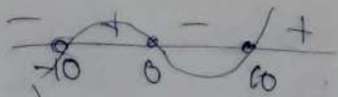
$a(10 - x^2)$

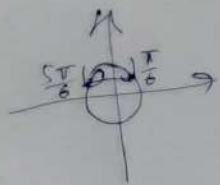
$\sqrt{10}$



Черновик

$2^t - 16$ $\quad t^3 - 100t = t(t-10)(t+10)$





≤ 0 $\quad >0$ $\quad >0$ $\quad \prod \leq 0$

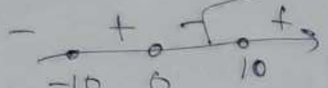
>0 $\quad >0$ $\quad >0$ $\quad \underline{x = \operatorname{arctg} y}$

$\operatorname{tg} x = y$

$-\frac{1}{a}$ $\quad 1$ $\quad 2a$

2 числа положительны $\quad t^3 - 100t$

$-12 + 0{,}5$



4 $\quad \left(\frac{1}{6} - 4\right)\pi$

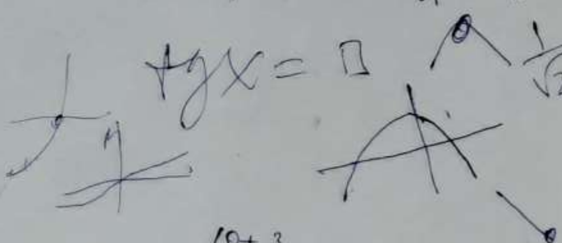
$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$\pi + \frac{\pi}{6}$ $\quad$ и.3

$3{,}14$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\left(3 + \frac{1}{6}\right)\pi$

$\operatorname{tg} x = \square$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$ $\quad 3\pi$

$9{,}42 + 0{,}5$ $\quad 10 + 3$ $\quad 4.3$

$3{,}2$ $\quad \frac{3{,}2}{6} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} > \frac{2}{5}$

$\boxed{\frac{5\pi}{6} - 4\pi > -10}$

$9{,}6$ $\quad 8 \quad 6$

$\frac{\pi}{6} - 4\pi$ $\quad -10 < \frac{5\pi}{6} - 4\pi$ $\quad a > 0: -\frac{1}{a}, 1, 2a$

$a < 0;\ 2a, 1, -\frac{1}{a}$

$ay^3 + (1 - a - 2a^2)y^2 + (2a^2 - 2a - 1)y + 2a = 0$ $\quad 1, -\frac{1}{a}, 2a$

$2a^2 + a - 1$

$-3a$

$ay^3 - 3ay + 2a + (2a^2 + a - 1)(y - y^2) = (2a^2 + a - 1)y\underline{(1-y)}$

$a(y^3 - y) + 2a\underline{(1-y)}$

$ay\underline{(y-1)}(y+1)$ $\quad (y-1)\left((2a^2 + a - 1)y + 2a - ay(y+1)\right) =$

$= (y-1)\left(-ay^2 + (2a^2 - 1)y + 2a\right) = (y-1)(ay+1)(2a-y)$

$-y(ay+1) \quad = -ay^2 - y + 2a^2y + 2a = 2a(ay+1)$

Чистовик 1 из 6

№1. $A=\sum_{k=1}^{49}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+$
$+\left(\frac{1}{49^2}-\frac{1}{50^2}\right)=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{50^2}=1-\frac{1}{50^2}<1$

$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt3-1)^2}\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt3-1}\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}}{\sqrt[3]{2}}=$
$=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1\Rightarrow A<1=B \overset{A<B}{\Rightarrow}$. Ответ: B.

№2. Пусть загадано $\overline{a_1\ldots a_{2022}}$. Двузначные числа, кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95; кратные 23: 23, 46, 69, 92. Покажем, что если $a_i=2$, то $i\geq 2020$: иначе $i\leq 2019\Rightarrow a_{i+1}=3$ (23 – единств. число, нач. с 2 и кратное 19 или 23), $a_{i+2}=8$ (38 – единств. число, нач. с 3), но нет числа нач. с 8 и $i+2\leq 2021$ и должна быть определена a_{i+3}, но такое невозможно (нет числа кратного 19 или 23 и нач. с 8). Т. е. $i\geq 2020$.
Тогда $a_2=5$ ($a_2=5$ или $a_2=2$, но $2<2020\Rightarrow a_2=5$) $\Rightarrow a_3=7\Rightarrow a_4=6\Rightarrow$
$\Rightarrow a_5=9\Rightarrow a_6=5$ ($a_6=5$ или $a_6=2$, но $6<2020\Rightarrow a_6=5$). Аналогично, получаем, что число $=\underbrace{\underline{9576},\ldots\underline{9576}}_{\substack{2020\text{ цифр}\\505\text{ „блоков"}}},a_{2021}a_{2022}$, откуда $a_{2021}=9\Rightarrow a_{2022}=2$ или $a_{2022}=5$.

Пример для 2: $\underbrace{9576,\ldots 9576}_{2020\text{ цифр}},92$ – подходит; для 5: $\underbrace{9576\ldots 9576}_{2020\text{ цифр}},95$ – подходит

Ответ: 2 или 5.

№3. Будем обозначать $f^n(x)=\underbrace{f(\ldots(f(x))\ldots)}_{n}$. ~~Индукцией по n докажем, что~~ $\cancel{f^n(x)=\begin{cases}-\sqrt[9]{1-x^9}, & \text{если } 2\mid n\\ \sqrt[9]{\frac{2-x^9}{1-x^9}}, & \text{если } 2\nmid n\end{cases}}$ ~~, при $n\geq 2$:~~

~~База: $n=2$:~~ $\cancel{f^2(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}}}$

Чистовик 2 из 6

~~Индукцией по n докажем, что $f^n(x)=$~~

$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}}=-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}\Rightarrow f(f(f(x)))=$

$=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}\right)^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}}=x\Rightarrow f^{n+3}(x)=f^n(f(f(f(x))))=$

$=f^n(x)$, аналогично $f^{n+3k}(x)=f^n(x)$, при натуральных k.

Значит, $f^{1305}(x)=f^3(x)=x$, т.к. $1305=3+1302=3+3\cdot 434\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{1305}(2022)=2022$.

Ответ: 2022.

№5. Среднее из чисел a, b, c положительно $\Leftrightarrow$ ($a,b>0$ или $b,c>0$ или $c,a>0$)

$\Rightarrow$) (в обозн. усл-я) $x_2>0\Rightarrow x_3>0\Rightarrow$ какие-то два числа положительны.

$\Leftarrow$) если $a,b>0$, то в случае, когда среднее число — это a или b получаем, что среднее число >0; в случае, когда среднее число не a и не b, получаем, что ~~наим. число — одно из чисел a или b~~ $x_1\in\{a,b\}\Rightarrow x_1>0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2\geq x_1>0\Rightarrow x_2>0$. Ост. случаи — аналогично.

1) $\begin{cases}t^3-100t>0\\ 2^t-16>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t(t-10)(t+10)>0\\ t>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-10,0)\cup(10,+\infty)\\ t\in(4,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\in(10,+\infty)$

2) $\begin{cases}t^3-100t>0\\ \sin t-\frac{1}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-10,0)\cup(10,+\infty)\\ t\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\end{cases}$, интервал $(10,+\infty)$

уже удовл. усл-ю по пункту 1); ~~(-10,0)~~ если $k\geq 0$, то $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cap$

$\cap(-10,0)=\varnothing$; если $k\leq -3$, то $\frac{5\pi}{6}+2\pi k\leq\frac{5\pi}{6}-6\pi<-5\pi<-10\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cap(-10,0)=\varnothing$; $\frac{\pi}{6}-2\pi,\ \frac{5\pi}{6}-2\pi\in(-10,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ интервал $\left(\frac{\pi}{6}-2\pi,\frac{5\pi}{6}-2\pi\right)$ подходит; $\frac{\pi}{6}-4\pi<-10$, $\frac{5\pi}{6}-4\pi>-10\Rightarrow$

$\Rightarrow(-10,0)\cap\left(\frac{\pi}{6}-4\pi,\frac{5\pi}{6}-4\pi\right)=\left(-10,\frac{5\pi}{6}-4\pi\right)$ — подходит.

Чистовик 3 из 6

3) $\begin{cases} 2^t-16>0 \\ \sin t-\frac{1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\in(4,+\infty) \\ t\in\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right) \end{cases}$, ~~инте~~рвал $(10,+\infty)$

уже подходит, рассмотрим $[4,10]$: если $k\le 0$, то $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<4$

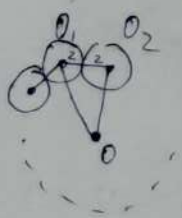
если $k\geq 2$, то $\frac{\pi}{6}+2\pi k>10$; если $k=1$: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+2\pi\right)\cap(4,10]=$

$=\left(\frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+2\pi\right)$

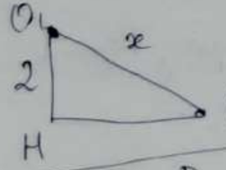
Ответ: $(10,+\infty)\cup\left(\frac{\pi}{6}-2\pi, \frac{5\pi}{6}-2\pi\right)\cup\left(-10, \frac{5\pi}{6}-4\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+2\pi\right)$.

№4.

Т.к. все шары касаются основания, то их центры лежат в одной плоскости ~~[illegible]~~ α. Рассмотрим сечение 13 шаров плоскостью α:
Центры шаров образуют правильный 13-угольник со стороной $2+2=4$.

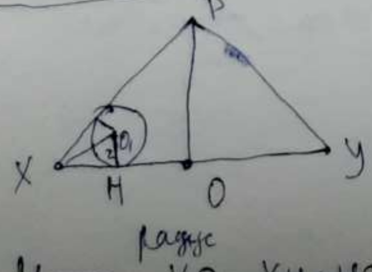


Пусть O-центр этого 13-угольника ~~тогда~~, O_1, O_2 - центры двух шаров, тогда $\angle O_1OO_2=\frac{360^\circ}{13}=\delta$, $O_1O=OO_2=x \Rightarrow$ по т. косинусов: $O_1O^2+O_2O^2-$
$-2O_1O\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2=O_1O_2^2=4^2 \Rightarrow 2x^2-2x^2\cos\delta=16 \Rightarrow x^2(1-\cos\delta)=8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=\frac{8}{1-\cos\delta} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{8}{1-\cos\delta}}$. Тогда проекция OO_1 на плоскость
основания $=\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\frac{8}{1-\cos\delta}-4}=\sqrt{\frac{8-4+4\cos\delta}{1-\cos\delta}}=\sqrt{\frac{4\cos\delta+4}{1-\cos\delta}}=2\sqrt{\frac{\cos\delta+1}{1-\cos\delta}}$



$O_1O^2=O_1H^2+HO^2$
$x^2=4+HO^2$

Очевидно, что O- центр основания конуса. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через O_1 и ось конуса.

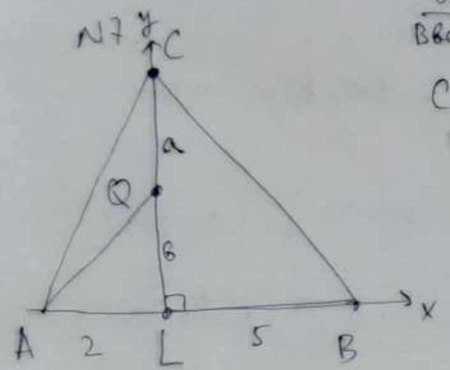


$\angle XPY=60^\circ$, $XP=PY \Rightarrow \triangle XPY$ - правильный и $\angle PXY=60^\circ \Rightarrow \angle O_1XH=30^\circ \Rightarrow O_1X=2\cdot 2=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow XH=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

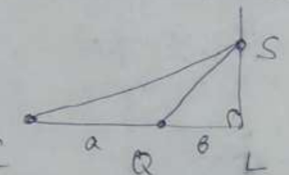
Итого: $XO=XH+HO=2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{\cos\delta+1}{1-\cos\delta}}$, $\delta=\frac{360^\circ}{13}$

Ответ: $2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{\cos\frac{360^\circ}{13}+1}{1-\cos\frac{360^\circ}{13}}}$

Чистовик Чиз 6



Введем прямоуг. сист. координат так, чтобы C лежала на O_y, B — на O_x, L — начало. Пусть $LQ = b$, $QC = a \Rightarrow Q(0, b)$, $C(0, a+b)$. BC проходит через $B(5,0)$ и $C(0, a+b) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ её ур-е — это $-\frac{a+b}{5}x + a+b$.
AQ проходит через $A(-2,0)$, $Q(0,b) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ её ур-е — это $\frac{b}{2}x+b$. Также $AQ \perp CB \Rightarrow \left(-\frac{a+b}{5}\right)\cdot\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow \frac{(a+b)b}{10} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+b)b = 10$. Рассматриваем



$\angle CSQ$ < $\angle CSL$, который находится в ΔCSL и $\angle SLC = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CSL < 90° \Rightarrow \angle CSQ < 90° \Rightarrow \angle CSQ$ максимален $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\angle CSQ$ максимален. Пусть $SL = x \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle QSL = \frac{b}{x}$, $\operatorname{tg}\angle CSL = \frac{a+b}{x} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle CSQ =$

$$= \operatorname{tg}(\angle CSL - \angle QSL) = \frac{\operatorname{tg}\angle CSL - \operatorname{tg}\angle QSL}{1 + \operatorname{tg}\angle CSL \cdot \operatorname{tg} QSL} = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a+b}{x}\cdot\frac{b}{x}} = \frac{\frac{a}{x}}{1 + \frac{(a+b)b}{x^2}} = \frac{ax}{x^2 + (a+b)b} =$$

$$= \frac{ax}{x^2+10}, \text{ т.к. } (a+b)b = 10. \quad \left(\frac{ax}{x^2+10}\right)' = \frac{(ax)'\cdot(x^2+10) - ax(x^2+10)'}{(x^2+10)^2} =$$

$$= \frac{a(x^2+10) - ax\cdot 2x}{(x^2+10)^2} = \frac{ax^2 + 10a - 2ax^2}{(x^2+10)^2} = \frac{10a - ax^2}{(x^2+10)^2} = \frac{a(10-x^2)}{(x^2+10)^2}$$

Если $x > \sqrt{10}$, то производная < 0, если $x < \sqrt{10}$, то производная $> 0 \Rightarrow \sqrt{10}$ — максимум функции и $\sqrt{10} < 5 = LB \Rightarrow$ если $SL = \sqrt{10}$, то угол $\angle CSQ$ наибольший. Пусть S — такая точка на LB, что $LS = \sqrt{10} \Rightarrow \angle CSQ$ наибольший.

Ответ: $\sqrt{10}$.

<u>Чистовик 5 из 6</u>

№6. Пусть $\operatorname{tg} x = y$. ~~ctg~~ $ay^3+(1-a-2a^2)y^2+(2a^2-2a-1)y+2a=$

$=ay^3+(1-a-2a^2)y^2+(2a^2+a-1)y+(-3a)y+2a=(2a^2+a-1)(y-y^2)+ay^3-ay+$

$+2a-2ay=(2a^2+a-1)y(1-y)+ay(y^2-1)+2a(1-y)=(y-1)(-(2a^2+a-1)y+$

$+ay(y+1)-2a)=(y-1)(ay^2-(2a^2-1)y-2a)=(y-1)((ay^2+y)-(2a^2y+2a))=$

$=(y-1)(y(ay+1)-2a(ay+1))=(y-1)(ay+1)(y-2a)$. ~~Если $a=0$, то решение $y\in\{1,2a\}$~~

Если $a\neq 0$, то решения y это $1, -\frac{1}{a}, 2a$. Т.к. мы рассматриваем корни на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, то $x\in\{\operatorname{arctg}1, \operatorname{arctg}(-\frac{1}{a}), \operatorname{arctg}(2a)\}$. Если $a<0$, то
все эти числа лежат в $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$-\frac{1}{a}<1<2a \Rightarrow \operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})<\operatorname{arctg}1<\operatorname{arctg}(2a) \Rightarrow$ наиб. расст. между корнями $=\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})=\operatorname{arctg}(2a)+\operatorname{arctg}(\frac{1}{a})$; если $a>0$, то

$2a<1<$ Пусть x_1, x_2, x_3 – это $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})$, $\operatorname{arctg}1$, $\operatorname{arctg}2a$, мы хотим найти наименьшее или наибольшее возможное

Рассмотрим $|\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}1|$

1) если $a\geq\frac{1}{2}$, то $-\frac{1}{a}<1\leq 2a \Rightarrow$ наиб. расст. $=\operatorname{arctg}2a-\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})$ " $\operatorname{arctg}2a+\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$;

$(\operatorname{arctg}(2a)+\operatorname{arctg}(\frac{1}{a}))'=\frac{1}{1+4a^2}\cdot 2+\frac{1}{1+(\frac{1}{a})^2}\cdot(-\frac{1}{a^2})=\frac{2}{1+4a^2}-\frac{1}{a^2+1}=$

$=\frac{2a^2+2-1-4a^2}{(1+4a^2)(a^2+1)}=\frac{1-2a^2}{(1+4a^2)(a^2+1)}$ ~~<0~~ $\Rightarrow$ функция возрастает при $[\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt2}]$ и убывает при $(\frac{1}{\sqrt2},+\infty)$ ~~убывает и $\operatorname{arctg}2a-\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})>$~~

$\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt2}+\operatorname{arctg}\sqrt2=2\operatorname{arctg}\sqrt2>2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{a\to+\infty}(\operatorname{arctg}2a+\operatorname{arctg}(\frac{1}{a}))=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(2\cdot\frac{1}{2})+\operatorname{arctg}(\frac{1}{\frac{1}{2}})=\boxed{\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}2}$

2) если $0<a\leq\frac{1}{2}$, то $-\frac{1}{a}<2a\leq 1 \Rightarrow$ наиб. расст. $=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}-\frac{1}{a}=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$

$(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{a})'=\frac{1}{1+(\frac{1}{a})^2}\cdot(-\frac{1}{a^2})=-\frac{1}{a^2+1}<0 \Rightarrow$ ф-я убывает и
наим. знач. при $a\to 0$

$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}-\frac{1}{a}\geq\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\frac{1}{2}})=$ ~~arctg~~ $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}2$

3) если $-1\leq a<0$, то $2a<1\leq-\frac{1}{a} \Rightarrow$ наиб. расст. $=\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})-\operatorname{arctg}(2a)=$

$=-(\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})) \Rightarrow (\operatorname{arctg}-\frac{1}{a}-\operatorname{arctg}2a)'=-\frac{2a^2-1}{(1+4a^2)(a^2+1)}=\frac{3a^2}{(1+4a^2)(a^2+1)}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-я $\uparrow$ и $\operatorname{arctg}-\frac{1}{a}-\operatorname{arctg}2a\geq\operatorname{arctg}(-\frac{1}{-1})-\operatorname{arctg}(2(-1))=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}2$

Чистовик 6 из 6

а) если $a \le -1$, то $2a < -\frac{1}{a} \le 1 \Rightarrow$ наиб. расст. $=$ $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 2a = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2a\right)' = -\frac{1}{1+4a^2} \cdot 2 = \frac{-2}{1+4a^2} \Rightarrow$ ф-я убывает и $\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2a\right) =$

$= \frac{\pi}{4}$? $\quad \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2a \geqslant \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(2(-1)) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$, $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2a\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$

Если $a = 0$, то корни $-$ $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 2a = \operatorname{arctg} 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} 1 - 0 = \frac{\pi}{4}$ - наим. значение, достигается только при $a = 0$

Ответ: $a = 0$; $\frac{\pi}{4}$ - значение.