МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шамшура Егор Сергеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	15	15	0

Черновик стр. 4

№3

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $\qquad f^7(x) = \frac{1}{1-x^7}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}-1}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = \sqrt[7]{1-1(1-x^7)} = x$$

$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \Rightarrow$ Образуется цикл:

i - кол-во f.

$i \equiv_3 0 \Rightarrow \underbrace{f\ldots f(x))))}_{i} = x$

$i \equiv_3 1 \quad \underbrace{f\ldots f(x)))}_{i} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$;

$i \equiv_3 2 \quad f\ldots f(x)))) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$

$1304 \equiv_3 8 \equiv_3 2 \Rightarrow f(f(f(\ldots f(2022))))) \ldots =$

$$= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{\sqrt[7]{2022^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

№6

$a\,ctg^3x + (2a^2-a-2)\,ctg^2x + (2-4a-2a^2)\,ctg\,x + 4a = 0$

$\cancel{a\,ctg^3x - 2\,ctg^2x + (2a^2}$

$a\,ctg^3x - a\,ctg^2x + (2a^2-2)\,ctg^2x - 4a\,ctg\,x - (2a^2-2)\,ctg\,x + 4a = 0$

$a\,ctg^2x\,(ctg(x)-1) + (2a^2-2)(ctg^2x - ctg\,x) - 4a\,(ctg\,x - 1) = 0$

$a\,ctg^2x\,(ctg(x)-1) + ctg\,x\,(2a^2-2)(ctg\,x-1) - 4a\,(ctg(x)-1) = 0$

$(ctg(x)-1)\,(a\,ctg^2x + ctg(x)(2a^2-2) - 4a) = 0$

$ctg\,x = 1$ $\qquad a\,ctg^2x + ctg\,x\,(2a^2-2) - 4a = 0$

$D = 4a^4 - 2\cdot 2a^2\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 4a\cdot a =$

$= 4a^4 + 8a^2 + 4 = (2a^2+2)^2$

$ctg\,x = \dfrac{2a^2-2 \pm (2a^2+2)}{2a}$

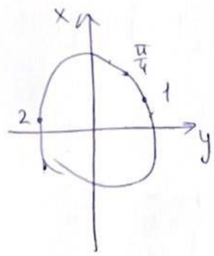
$\left[\begin{array}{l} ctg\,x = \dfrac{2a^2-2+2a^2+2}{2a} = \dfrac{4a^2}{2a} = 2a \\ ctg\,x = \dfrac{2a^2-2-2a^2-2}{2a} = \dfrac{-4}{2a} = -\dfrac{2}{a} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} ctg\,x = 1 \\ ctg\,x = 2a \\ ctg\,x = -\dfrac{2}{a} \end{array}\right. \Rightarrow$ $\qquad x \in (0;\pi) \Rightarrow ctg\,x = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{4}$

1) Рассмотрим частный случай: $a=0 \Rightarrow$ один из корней вырождается $\Rightarrow$ $ctg\, x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

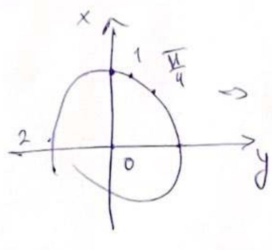
$ctg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

2) $a > 2 \Rightarrow$



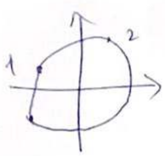
$\Rightarrow d > \frac{\pi}{4}$

3) $a < 2$

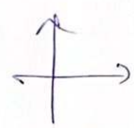


$\Rightarrow d > \frac{\pi}{4}$

4) $a > -1$



5) $a < -1$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ max всегда больше $\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ при $a=0$ расст $\frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Черновик
стр. 5

№5

$a = t^3 - 144t \quad b = 2^t - 256 \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $t^3 - 144t < 2^t - 256 < \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t = 8$

$8^3 - 144 \cdot 8 = 64 \cdot 8 - 144 \cdot 8 = 8(64 - 144) = 8(60 - 140) = 8 \cdot (-80) =$
$= -640$

$\sin(8) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$

$\sin(8) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(8) > \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$

$8 \lessgtr \frac{2\pi}{3} + 2\pi$

Черновик стр. 6

$k=1$

$t \in \left[\frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{2\pi}{3}+2\pi\right)$

$t \in [8;12)$

$8 \overset{<}{\vee} \frac{2\pi}{3}+2\pi$

$24 \overset{<}{\vee} 2\pi+6\pi$

$24 \overset{<}{\vee} 8\pi$

$8 \cdot 3 \overset{<}{\vee} 8 \cdot \pi$

$\frac{\pi}{3}+2\pi \vee 8$

$7 \cdot \pi \vee 3 \cdot 8$

$7 \cdot 3{,}1415... < 3 \cdot 8$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

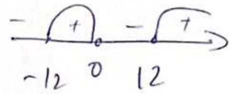
N5

$x_1 \le x_2 \le x_3 \Rightarrow x_2 > 0 \Rightarrow$

Есть 3 возможных варианта:

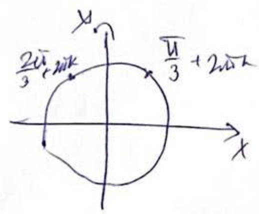
1) $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$

2) $x_1 \le 0 \le x_2 \le x_3$ $\Rightarrow$ Решим ур-е: $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$

$a \geq 0 \Rightarrow t(t^2 - 12^2) \geq 0 \Rightarrow$ 

$\Rightarrow t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty)$

$b \geq 0 \quad 2^t - 256 \geq 0 \Rightarrow t \geq 8$ $\Rightarrow$

$c \geq 0 \Rightarrow \sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 

$\Rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$

$\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty) \\ t \in [8; +\infty) \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 12 \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1 \quad \begin{cases} t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right] \\ t \geq 12 \end{cases} \quad \varnothing$

$k \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} t \geq 12 \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 12 \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \\ k \geq 2; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} a \le 0 \\ b \ge 0 \\ c \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-\infty; -12] \cup [0; 12] \\ t \ge 8 \\ t \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t \in [8; 12] \\ t \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow t \in [8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi]$

3) $\begin{cases} a \ge 0 \\ b \le 0 \\ c \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty) \\ t \le 8 \\ t \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t \in [-12; 0] \\ t \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow k = -1 \begin{cases} t \in [-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}] \\ t \in [-12; 0] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in [-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}]$

$\Rightarrow$ $k = -2$ $\begin{cases} t \in [-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}] \\ t \in [-12; 0] \end{cases} \Rightarrow t \in [-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}]$

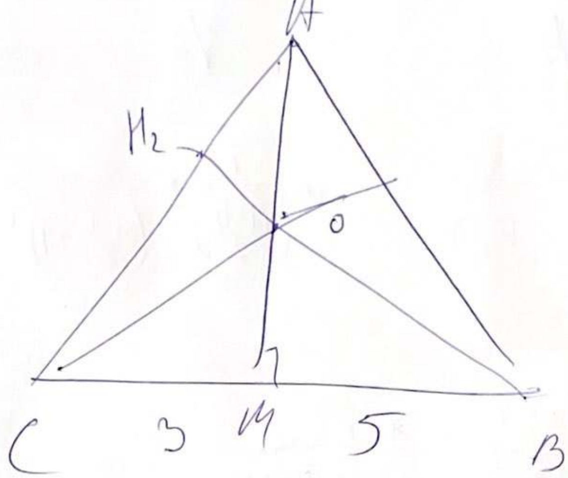
4) $\begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \\ c \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in [-12; 0) \cup [12; +\infty) \\ t \ge 8 \\ t \in [\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 12 \\ t \in [\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Найдем объединение всех решений:

$t \ge 12$; $t \in [-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}]$; $t \in [-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}]$;

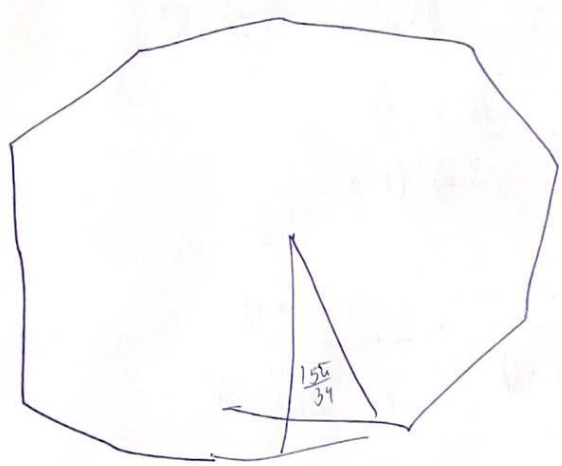
$t \in [8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi]$ $\Rightarrow$ Ответ: $t \in [-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}] \cup [-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}] \cup$
$\cup [8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi] \cup [12; +\infty)$

$\alpha = \frac{15\pi}{17}$



$(n-2)\pi$

$\frac{15\pi}{17}$



№1 Черновик стр. 9

$$A = \frac{\sqrt[6]{1+2\sqrt{3}+3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{i}{\left(\frac{(i-1)}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{i-1}{2}+1\right)^2} + \frac{115}{55^2 \cdot 60^2}$$

$$\frac{i\cdot 4\cdot 4}{(i-1)^2\ (i+1)^2} = \frac{16i}{(i-1)^2(i+1)^2}$$

$$B = f(3) + \dots + f(115) = f(3)$$

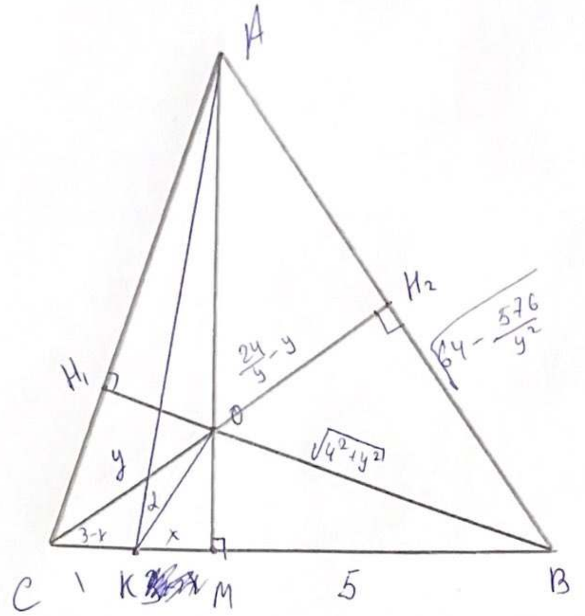
$$f(3) + f(5) + f(7) = \frac{16\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} + \frac{16\cdot 5}{4^2\cdot 6^2} + \frac{16\cdot 7}{6^2\cdot 8^2}$$

$$f(i-1) + f(i) + f(i+1) = \cancel{\frac{16(i-1)}{(i-2)^2(i-3}}$$

$$= \frac{16(i-1)}{(i-2)^2(i^2)} + \frac{16i}{(i-1)^2(i+1)^2} + \frac{16(i+1)}{(i^2)(i+2)^2}$$

~~Чистовик стр.3~~

Черновик



$MC=3; BM=5;$ Пусть $MK=x \Rightarrow CK=3-x.$

$CO^2-3^2=BO^2-5^2; \quad BO^2-CO^2=4^2; \quad BO=\sqrt{4^2+CO^2}$

$\cos\angle OCB=\frac{3}{y}; \quad \frac{CH_2}{BC}=\frac{3}{y}; \quad CH_2=\frac{8\cdot 3}{y}=\frac{24}{y}; \Rightarrow$

$\Rightarrow OH_2=\frac{24}{y}-y=\frac{24-y^2}{y}; \quad BH_2=\sqrt{64-\frac{576}{y^2}}=$

$=\sqrt{4^2+y^2-\left(\frac{24}{y}-y\right)^2}=$

$=\sqrt{16+y^2-\frac{576}{y^2}+48-y^2}=\sqrt{64-\frac{576}{y^2}}$

$OM=\sqrt{y^2-9};$

Черновик стр. 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} =$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{x^7}{1-x^7}}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{\frac{1}{1-x^7}}{1-\frac{1}{1-x^7}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{\cancel{\frac{1}{1-x^7}}}{\cancel{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{1}{-x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{\frac{1}{1-x^7}}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = f(f(f(f(x)))) \Rightarrow$$

$$\equiv_4 0 \quad \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$\not{R}$

$$\equiv_4 1$$

1: $\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

2: $\frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{x^7}{1-x^7}}}$

3: x

4: $\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$\equiv_3 0 \quad x$

$\equiv_3 1 \quad \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$\equiv_3 2 \quad \frac{1}{\sqrt[7]{-\frac{x^7}{1-x^7}}}$

1 3 0 2

$1304 \,|\, \equiv_3 1 \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}}$

$1+3+4=8 \equiv_3 2$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{2022^7}{2022^7-1}}} = \sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{1+2\sqrt{3}+3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{5}{36} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = 1 - \frac{9}{36} + \frac{5}{36} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{9} + \frac{7}{144} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = 1 - \frac{16}{144} + \frac{7}{144} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{16} + \frac{9}{4^2\cdot 5^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = 1 - \frac{1}{5^2} + \frac{11}{5^2\cdot 6^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = 1 - \frac{1}{60^2} \Rightarrow$$

$$B = 1 - \frac{1}{60^2}$$

$$A = 1 \Rightarrow \quad A > B$$

Ответ: $A > B$

№2 Чистовик стр. 2

Выпишем все двузначные кратные 19 и 23:

19: 19, 38, 57, 76, 95

23: 23, 46, 69, 92

Построим древо вариантов:

$$4 \to 6 \to 9 \to 2 \to 3 \to 8 \quad (1)$$

$$\Rightarrow$$

$$9 \to 5 \to 7 \to 6 \to 9 \ldots \quad (2)$$

В 1ом случае это может быть замыкают вариант, т.к на нем цепочка прервется.
Во втором цикл, с помощью которого мы строим последовательность:

$$\overset{1}{4} \to \overset{2}{6} \to \overset{3}{9} \to \overset{4}{5} \to \overset{5}{7} \to \overset{6}{6} \to \ldots \to \overset{2019}{9}$$

a_i – ?

$i \underset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow a_i = 9$

$i \underset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow a_i = 6$

$i \underset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow a_i = 7$

$i \underset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow a_i = 5$

$$\Rightarrow \overset{2019 \underset{4}{\equiv} 3}{9} \to \overset{2020}{2} \to \overset{2021}{3} \to \overset{2022}{8} \Rightarrow$$

$$9 \to 5 \to 7 \to 6$$

$\Rightarrow$ Ответ: 6 или 8

Чистовик стр. 3

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{\sqrt[7]{x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}-1}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = \sqrt[7]{1-1(1-x^7)} = x$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \Rightarrow$$ Образуется цикл:

1	2	3	4		1304	
$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$	$\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{\sqrt[7]{x^7}}$	x	$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$	$\dots$	?	$\Rightarrow$

$$\Rightarrow i \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x))))\dots)}_{i} = x$$

$$i \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots)}_{i} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \rightarrow$$

$$i \underset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots)}_{i} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}$$

$$\Rightarrow i = 1304 \Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots)}_{1304} = \sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

$$1304 \underset{3}{\equiv} 8 \underset{3}{\equiv} 2$$

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Чистовик стр. 4

№6

$$a\,ctg^3(x)+(2a^2-a-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)\,ctg\,x+4a=0$$

$$a\,ctg^3x-a\,ctg^2x+(2a^2-2)\,ctg^2x-(2a^2-2)ctg\,x)-4a\,ctg\,x+4a=0$$

$$a\,ctg^2x\,(ctg\,x-1)+(2a^2-2)\,ctg\,x\,(ctg\,x-1)-4a\,(ctg(x)-1)=0$$

$$(ctg(x)-1)\,(a\,ctg^2x+(2a^2-2)\,ctg(x)-4a)=0 \Rightarrow$$

$ctg\,x=1$

$$D=4a^4-2\cdot 4a^2+4+4\cdot 4a\,a=$$

$$=4a^4+2\cdot 4a^2+4=(2a^2+2)^2$$

$$ctg\,x=\frac{2a^2-2\pm(2a^2+2)}{2a}$$

$$\left[\begin{array}{l} ctg\,x=\dfrac{2a^2-2+2a^2+2}{2a}=\dfrac{4a^2}{2a}=2a \\ ctg\,x=\dfrac{2a^2-2-2a^2-2}{2a}=\dfrac{-4}{2a}=-\dfrac{2}{a} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} ctg\,x=1 & -\ b_1\ (\text{корень } 1) \\ ctg\,x=2a & -\ b_2\ (\text{корень } 2) \\ ctg\,x=-\dfrac{2}{a} & -\ b_3\ (\text{корень } 3) \end{array}\right. \Rightarrow$$

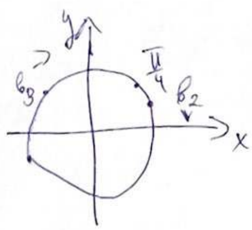
1) Рассмотрим $a=0$, когда одного корня нет:

$$\left[\begin{array}{l} ctg\, x = 1 \\ ctg\, x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{т.к. } x \in (0;\pi), \text{ то } \begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4}$$

2) Рассмотрим ост. случаи:

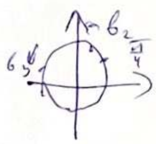
при $a > 2$



$\rightarrow |b_2 - b_3| > \frac{\pi}{4}$

и это max

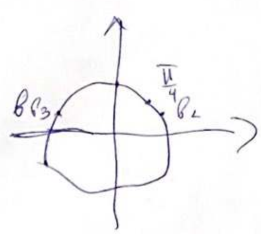
при $a \in (0; \frac{1}{2})$



~~$|b_3 - b_2| > \frac{\pi}{4}$~~

$|b_3 - \frac{\pi}{4}| > \frac{\pi}{4}$

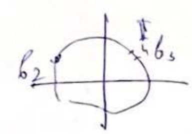
при $a \in [1; 2]$



$|b_2 - b_3| > \frac{\pi}{4}$

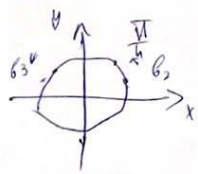
и это max

при $0 > a > -2$



$|b_2 - b_3| > \frac{\pi}{4}$

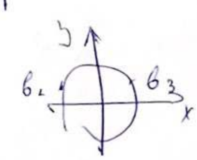
при $a \in (\frac{1}{2}, 1)$



$|b_2 - b_3| > \frac{\pi}{4}$

и это max

при $a \leq -2$



$|b_2 - b_3| > \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

Корни находятся всегда в разных четвертях $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ один из корней ~~них~~ всегда в промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi)$, а другой $(0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их расст $> \frac{\pi}{4}$ всегда, кроме $a=0$

Ответ: Расст. $= \frac{\pi}{4}$; $a=0$

№5

$x_1 \le x_2 \le x_3 \Rightarrow x_2 > 0 \Rightarrow$

Есть 2 возможных варианта:

1) $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$

2) $x_1 \le 0 < x_2 \le x_3$

$\Rightarrow$ Решим ур-е: $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a \geq 0 \quad t(t^2-12^2) \geq 0 \Rightarrow$ $-\ \ -12\ \ +\ \ 0\ \ -\ \ 12\ \ +$ $\Rightarrow t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty)$

$b \geq 0 \quad 2^t - 256 \geq 0 \Rightarrow t \geq 8$

$c \geq 0 \quad \sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$

1) $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \begin{cases} t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty) \\ t \in [8; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \geq 12$; но при $t = 12$ $\sin(12) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow t > 12$

2) $\begin{cases} a \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \begin{cases} t \in [-12; 0] \cup [12; +\infty) \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases}$ $t \geq 12$ уже есть $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t \in [-12; 0) \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{matrix} k = -1 \\ k = -2 \end{matrix} \left[\begin{matrix} t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ t \in \left(-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{matrix} \right.$

3) $\begin{cases} b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \begin{cases} t \geq 8 \\ t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 8 \\ k = 1 \Rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in \left[8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right] \Rightarrow t \in \left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$

Ответ: $t \in \left(-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) \cup$

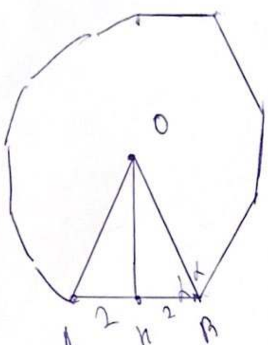
$\cup (12; +\infty)$

№4

Разместив шары по кругу, шары точками соприкосновение образуют правильный 17 угольник (сторона которого равна $2r = 4$) $\Rightarrow$

Пусть $\angle OBA = \alpha \Rightarrow 2\alpha = \frac{15\pi}{17} \Rightarrow$

$\angle OBA = \alpha = \frac{15\pi}{34} \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{OH}{HB} = tg\angle OBH;$

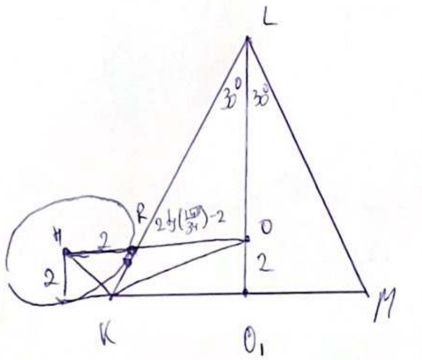
$OH = 2\, tg\left(\frac{15\pi}{34}\right)$

Построим ~~боковое~~ осевое сечение:

$\angle KLM = 60°$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KLO_1 = 30° \Rightarrow$, т. к.

$OH = 2\, tg\left(\frac{15\pi}{34}\right)$, то $RO = OH - r = 2tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 2 \Rightarrow$



$\Rightarrow RL = 2 \cdot RO = 4\, tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 4 \Rightarrow$

$$OL = \sqrt{\left(4tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 4\right)^2 - \left(2tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 2\right)^2} = \sqrt{3\left(2tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 2\right)^2} =$$

$$= \left(2\, tg\frac{15\pi}{34} - 2\right)\sqrt{3} \Rightarrow \frac{OR}{KO_1} = \frac{OL}{LO_1} \Rightarrow$$

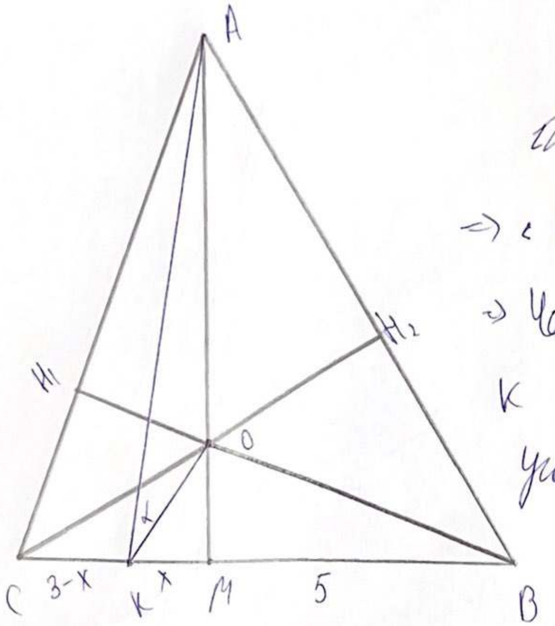
$$\Rightarrow KO_1 = \frac{OR \cdot LO_1}{OL} = \frac{\left(2tg\left(\frac{15\pi}{34}\right) - 2\right)\left(2 + \left(2tg\frac{15\pi}{34} - 2\right)\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(2tg\frac{15\pi}{34} - 2\right)} =$$

$$= \frac{2 + \left(2tg\frac{15\pi}{34} - 2\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = r \text{ конуса} \Rightarrow$$

Ответ:

$R^{7} = \frac{2 + \left(2\, tg\frac{15\pi}{34} - 2\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

№7



~~∠~~ $\angle AKO \to max$ и $K \in BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABH_1 > \angle ACH_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Чем ближе мы менем точку K к вершине B, тем больше угол α ($\angle AKO = \alpha$) $\Rightarrow$ точка K кало- житься не точку B $\Rightarrow$ $MK = MB = 5$

Ответ: 5