МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шилов Александр Борисович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

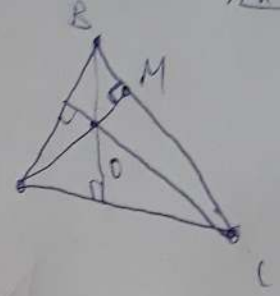
№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Черновик   Лист №1

1м ⇒

4=2.

BM=5
MC=3
K∈BC.
AKC-max



Были 5769.

не полностью запомнил
отсчёт цифр: Количество цифр
не кратно 3 и 4 ⇒ возможны варианты
окончания на 576 и 238

Если там 2021 цифра, то варианты окончаний 7 и 25

23 × 19 = 437, 19 × 2 = 38, 19 × 3 = 57, 19 × 4 = 76, 19 × 5 = 95, 4 × 23 = 92

19, 38, 57, 76, 95

1234567

23, 46, 69, 92

2020 : 4 = 505

2021 − 1 = 2020

469 → 57695, 238 ⊗

Осталось проверить числа принадлежащие к К₀
к отрезку ABC.

~~46~~695769 2(3)   типа 3

69238

Чистовик Лист №2

Задача №1

1) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

тогда: $\frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{2k+1}{(k\cdot(k+1))^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \ldots$

$\ldots + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2} < 1$

2) $\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Нетрудно заметить, что $A = 1$, а $B < 1$ => A - больше

$\boxed{\text{Ответ: } A}$

Чистовик: лист №3

№4

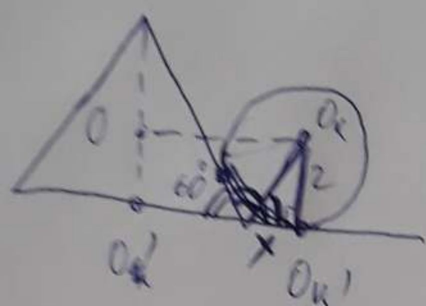
1)

проекция на основание

$\alpha = \frac{\pi}{17}$

$O_kO = \cancel{\frac{2}{\cos\alpha}}\ \frac{2}{\sin\alpha}$

2)



$x = 2\cdot ctg\,60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$R + x = OO_k$

3) $R + x = \frac{2}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{2}{\cancel{\cos\alpha}\ \sin} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \cancel{\frac{2}{\cos\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}} =$

$= \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Чистовик. Лист №4

Задача №3

1) $f(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt[11]{1-\dfrac{1}{1-x^{11}}}} = \dfrac{1}{\sqrt[11]{\dfrac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}} = \sqrt[11]{\dfrac{1-x^{11}}{-x^{11}}}$

2) $f(f(f(x))) = \dfrac{1}{\sqrt[11]{1-\dfrac{1-x^{11}}{-x^{11}}}} = \sqrt[11]{\dfrac{-x^{11}}{-x^{11}-1+x^{11}}} = \sqrt[11]{x^{11}} = x$

3) $1306 = 3 \cdot 435 + 1$.

После 3-х применений функции возвращает $x \Rightarrow$ переходим 1 применению.

$$\underbrace{f(f(\ldots f(2022))\ldots)}_{1306} = f(2022) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}}$$

Чистовик Лист №5

Задача №6

$$a\,tg^3x + (2-a-a^2)\,tg^2x + (a^2-2a-2)\,tg\,x + 2a = 0$$

$$at^3 - (a^2+a-2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$$

$$a^2(t^2-t) + a(t^3-t^2-2t+2) + (2t^2-2t) = 0$$

Найдём корень не зависящий от параметра

$$\begin{cases} t^2-t=0 \quad ; \; t(t-1)=0 \\ t^3-t^2-2t+2=0 \\ 2t^2-2t=0 \end{cases}$$

$t=1$ — решение системы,

Найдём остальные корни.

	a	$-a^2-a+2$	a^2-2a-2	$2a$
1	a	$-a^2+2$	$-2a$	0

$$at^2-(a^2-2)t-2a=0$$

1) $a \neq 0$: $\quad D = a^4+4-4a^2+8a^2 = (a^2+2)^2$;

$$t = \frac{a^2-2 \pm (a^2+2)}{2a}$$

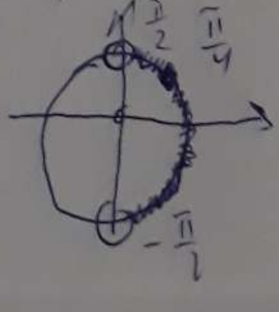
$$\left[\begin{aligned} t &= a \\ t &= -\frac{2}{a} \end{aligned}\right.$$

2) $a=0$; $2t=0$; $t=0$

Рассмотрим несколько случаев:

1° $t=0$; $t=1$ (при $a=0$)

$$\left[\begin{aligned} tg\,x &= 0 \\ tg\,x &= 1 \end{aligned}\right.$$



$\max l = \frac{\pi}{4}$

Черновик Лист 6

Задача № 6 (продолжение).

2^{0} (при $a \neq 0$)

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = a \\ t_3 = -\frac{2}{a} \end{array}\right.$$

Проверим совпадения:

$t_2 = t_3$: $a^2 = -2$

$\varnothing$

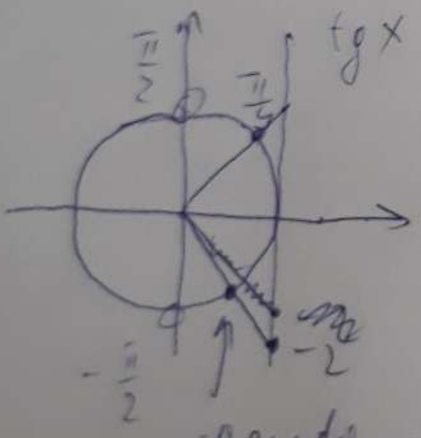
$t_1 = t_2$; $\underline{a = 1}$

$tg x = t \in \{1; -2\}$

$t_1 = t_3$: $-\frac{2}{a} = 1$; $\underline{a = -2}$

$tg x = t \in \{1; -2\}$

При $a \in \{1; -2\}$:

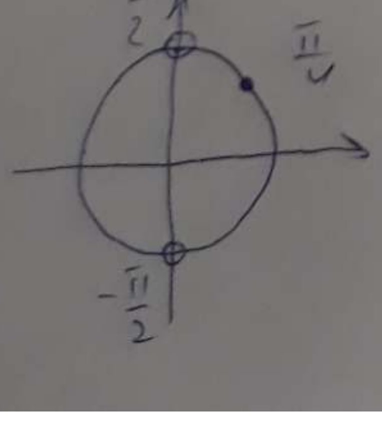


arctg -2

$\underline{\max l = \frac{\pi}{4} + \mathrm{arctg}\, 2 > \frac{\pi}{4}}$

При $a \notin \{0; 1; -2\}$:

$t_1 = 1$; $t_2 = a$; $t_3 = -\frac{2}{a}$



Заметим, что a и $-\frac{2}{a}$ имеют разные знаки, Тогда среди t_2 и t_3 есть отрицательные числа t_k

$\underline{\max l \geq \frac{\pi}{4} - t_k > \frac{\pi}{4}}$

Ответ: при $a = 0$; $l = \frac{\pi}{4}$

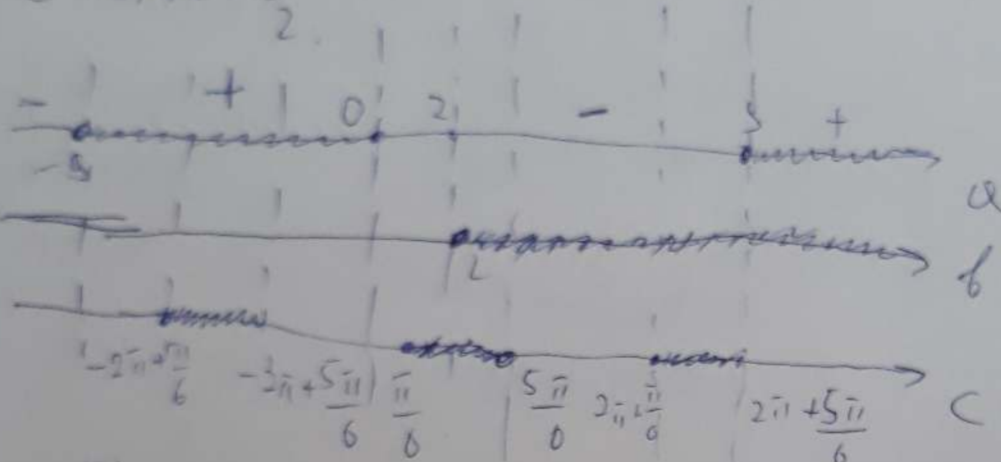
Чистовик лист N 7

Задача N5)

$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$



$2\pi + \frac{5\pi}{6} < 9$
$17\pi < 54$? Распишем подробнее:

$17\pi > 17 \cdot 3,14 = 51 + 1,7 + 0,68 = 53,38$

$17\pi < 3 \cdot 3,15 = 51 + 1,7\ 0,85 = 53,55$

то есть $17\pi < 54$ или $2\pi + \frac{5\pi}{6} < 9$.

Рассмотрим t:

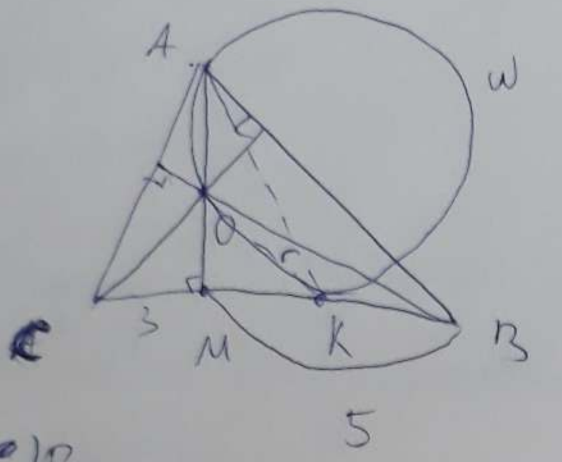
при $t \le -9$: $a, b < 0$ - не подходит

при $t > 9$ $a, b > 0$ - подходит.

Ответ: $t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{6};\ -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2;\ \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6};\ 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

Чистовик. Лист №8

Задача №7



1°) Рассмотрим окружность ω, проходящую через точки A и O и касающуюся прямой BC

(она не одна, а их две; но точка касания может либо попасть на сторону AC, либо нет)

Тогда точка K не может попасть внутрь соответствующего круга; пусть K_0 — точка касания

Если $K \neq K_0$ (на луче MB), то $\angle AKO$ равен полуразности дуги $\overset{\frown}{AO}$ и ещё одной, то есть он меньше угла AK_0O,

Тогда $\angle AK_0O$ — max

Аналогично с лучами MC и второй окружностью

2) Осталось найти численно, проверив, принадлежит ли K_0 стороне BC ($\angle B = \beta$)

$MK^2 = MO \cdot MA = 3 \cdot \text{ctg}\,\beta \cdot 5\,\text{tg}\,\beta = 15$

$MO = 3 \cdot \text{tg}(90^\circ - \beta) = 3\,\text{ctg}\,\beta$

$MA = 5\,\text{tg}\,\beta$. $MK = \sqrt{15}$

Чистовик. Лист №9

Задача №7 (продолжение)

3) Сравним $\sqrt{15}$ с 5 и с 3.

$$3 < \sqrt{15} < 5.$$

Следовательно, ответ: ~~но~~ : $\sqrt{15}$, а такая окружность тогда только одна, она на отрезке MB.

Ответ: $\sqrt{15}$

Чистовик Лист N 10

Задача N2

На 19 делятся (из двузначных): 19, 38, 57, 76, 95

На 23 делятся (из двузначных): 23, 46, 69, 92

Так как число начинается с 4, то возможное число 469 → 57692...

→ 38... ✗ – ни одно число на 19 или на 23 не начинается с 8.

Можем заметить, что цифры идут блоками (6957).

В 2021-значном числе, которое начинается с 4, таких „блоков" $\frac{2021-1}{4} = 505$ => последняя цифра может быть 7.

Но последний блок может быть другим:

6923, тогда ~~число~~ последняя цифра 3.

Ответ: 3 или 7