МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шинкарева Алёна Игоревна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

(1) (2) Черновик

:19

:23

19	23
38	46
57	69
76	92
95	---

5

4 6 _ _ _ _ _ на

4 6 9

4 3

ну

4 6 9 2 3 8 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

5 7 6 9 2 _ _ _ _ _ _ _ _ _

ну 5 _ _

но 92 – ну и 95, т.е. будет такой цикл:

4	6	9	5	7	6	9	5	7	6	9	5	7	6	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5	7	6	9	5	7	6	9	5	7
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

$20 = 4\cdot 4 + 4$

$23 = 4\cdot 5 + 3$

$22 = 4\cdot 5 + 2$

лист 1

Черновик
Черновик

(2)

4	6	9	5	7	6	9	5	7	6	9	5	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

т.е. начиная со 2ого элемента повторяется каждый 4

$2022 = 505 \cdot 4 + 2 \Rightarrow$ цифра 6

$2022 : 4 = 505$ (ост. 2)

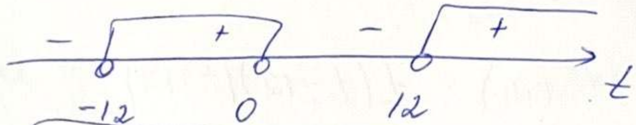
Ответ: 6

лист 2

Черновик

① $a = t^3 - 144t \quad > 0$

$t(t-12)(t+12) > 0$



$\boxed{t \in (-12;0) \cup (12;+\infty)}$

② $b = 2^t - 256 \quad > 0$

$2^t - 256 > 0$

$2^t > 256$

$2^t > 2^8$

$\boxed{t > 8}$

$\frac{2\pi}{3} - 4\pi = \frac{7\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$

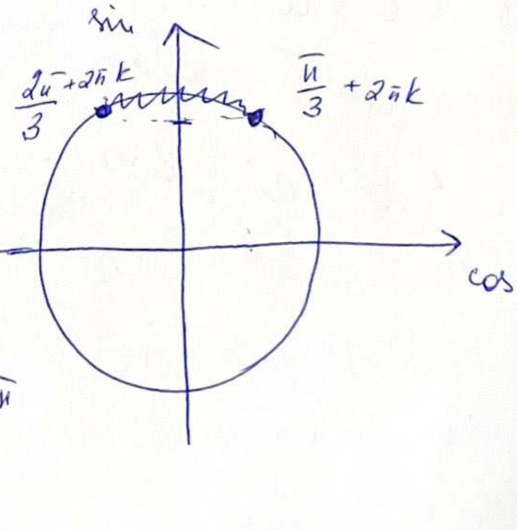
③

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}$

$\boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}$



$\pi\left(\frac{1}{3} + 2k\right) < t < \left(\frac{2}{3} + 2k\right)\cdot\pi$

5 Черновик

$a = t^3 - 144t$

$b = 2^t - 256$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = t^3 - 144t = t(t^2 - 144) = t(t-12)(t+12)$

$b = 2^t - 256 = 2^t - 2^8$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t - \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{t-\frac{\pi}{3}}{2} \cdot \cos\frac{t+\frac{\pi}{3}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} a \le b \le c, \quad b > 0 \\ a \le c \le b, \quad c > 0 \\ b \le a \le c, \quad a > 0 \\ b \le c \le a, \quad c > 0 \\ c \le a \le b, \quad a > 0 \\ c \le b \le a, \quad b > 0 \end{array}\right.$$

лист 4

① Черновик

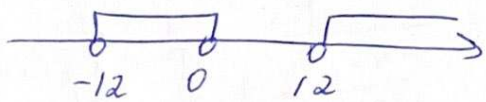
все случаи, когда $a>0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b \le a \le c \\ c \le a \le b \end{array}\right. \\ a>0 \quad (1) \end{cases}$$

Черновик

(1) $a>0$

$a = t^3 - 144t$

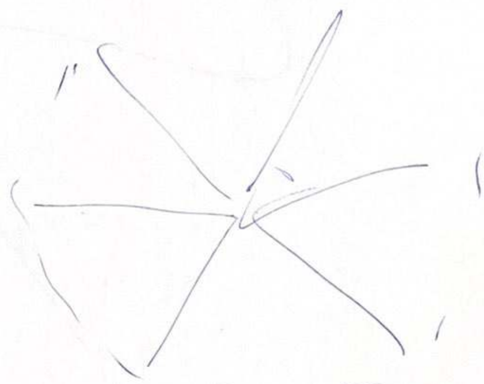


(2) $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 2^t - 256$

$2^t - 256 \le t^3 - 144t$

$t \in (-12;0)$



$\underbrace{\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\ge t^3 - 144t$

$\frac{16\cdot 3}{9} - \frac{4\cdot 3}{9} = \frac{12\cdot 3}{9}$

$-1 \le \sin t \le 1$

$180^\circ \cdot n - 360^\circ = \cancel{180}$

$-1-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k \cdot n = 180^\circ(n-2)$

$180^\circ \cdot n - k\cdot n = 360^\circ$

$\frac{-2-\sqrt{3}}{2} \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$3x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

лист 5

Черновик

лист 6

2022 2022.

лист 7

Черновик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1-x^7}{-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{-x^7-1+x^7}{-x^7}}} =$$

$$= \sqrt[7]{x^7} = x$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}, \text{ т.е.}$$

повторяется каждые 3 раза

$1304 \equiv_3 2 \Rightarrow$

применяется 1304 раза $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(f(f \ldots (f(x))) \ldots) = f(f(2022)) =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{1-2022^7}{-2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}.$$

Лист 7

Черновик

a b c

a c b

a b c

b a c

лист 8

лист 9

~~Чистовик~~ ~~лист 1~~

Черновик

$$\cancel{(ctg\,x - 1)\cdot\Big((a\cdot ctg^2 x - 4a\cdot ctg\,x - 4a) + ctg\,x\,(2a^2 + 4a - 2)\Big) = 0}$$

$\cancel{ctg\,x = 1}$ ~~– 1ый корень~~

$$(a\cdot ctg^2 x - \cancel{4a\cdot ctg\,x} - 4a) + ctg\,x\,(2a^2 + 4a - 2) = 0$$

Черновик

ave

$$a\cdot t^2 + (2a^2 - 2)\cdot t - 4a =$$

$$= (t + 2a)(at - 2) =$$

$$= at^2 - 2t + 2a^2 t - 4a$$

Черновик

лист 10

Черновик

$a \cdot ctg^3 x + (2a^2 - a - 2) \cdot ctg^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\, ctg x + 4a = 0$

~~$a \cdot ctg^3 x$~~

~~$a \cdot ctg^3 x + 2a^2$~~

$a \cdot ctg^3 x + 4a + (2a^2 - a - 2) ctg^2 x - (2a^2 + 4a - 2) \cdot ctg x = 0$

$a \cdot ctg^3 x - 5a \cdot ctg^2 x + 4a + (2a^2 + 4a - 2) \cdot ctg^2 x - (2a^2 + 4a - 2) \cdot ctg x = 0$

~~$(ctg x - 1)(a ctg^2 x + a ctg x - 4a)$~~

$(ctg x - 1)(a \cdot ctg^2 x - 4a ctg x + 4a) +$

$+ (ctg x - 1) \cdot ctg x (2a^2 + 4a - 2) = 0$

1ый корень:

$ctg x = 1$

Лист 11

Черновик

число B:

$$\frac{n+(n+1)}{\left(n\cdot(n+1)\right)^2} = \frac{n}{n^2\cdot(n+1)^2} + \frac{n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{n\cdot(n+1)^2} + \frac{1}{n^2\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{n\cdot(n+1)}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \cancel{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot59)^2} + \frac{119}{(59\cdot60)^2} =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{58^2} - \frac{1}{59^2} + \frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} =$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{60^2}}$$

~~Чистовик~~ Черновик

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = A$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

A

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Лист 13

Черновик

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} <$$

$$< \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{117}{58\cdot 58} + \frac{119}{59\cdot 60} =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

Черновик

$\underbrace{46957}_{5}\ \underbrace{6\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ }_{2017\text{ цифр}}$

$46957\ \underbrace{6957\ 6957\ 6957}\ \_\ \_\ \_$

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 4 \\ \underline{20} & 504 \\ 17 & \\ \underline{16} & \\ 1 & \end{array}$$

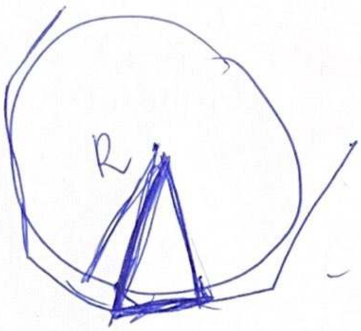
$\underbrace{46957}_{5}\ \underbrace{6957\ 6957\ 6957\ldots6957}_{2012}\ \underbrace{6\ 9\ 2\ 3\ 8}_{69576}$

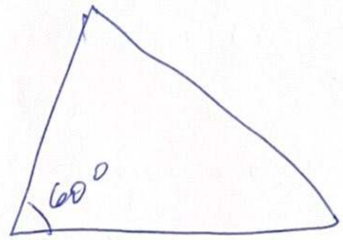
$$\begin{array}{r} 503 \\ \times\ \ \ 4 \\ \hline 2012 \end{array}$$

$f(x)$

лист 15

Черновик





$\cos\frac{\varphi}{2}$

$\frac{R\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$(t+2a)(at-2) =$

$=(at^2-2t+2a^2t-4a)(t-1) =$

$=$

лист 16

Чистовик лист 1

Задача 2

для удобства составим таблицу двузначных чисел, делящихся на 19 и на 23:

19	23
38	46
57	69
76	92
95	

теперь будем, двигаясь слева на право по цифрам данного 2022-значного числа, расставлять подходящие цифры:

1) 4 _ _ _ _ ...

т.к. единственное подходящее нам двузначное число (подходящее число - то, которое делится на 19 или 23), начинающееся с 4 - это число 46, то второй цифрой является цифра 6.

2) 4 6 _ _ _ ...

единственное подходящее нам двузначное число, начинающееся на 6 - число 69 => третьей цифрой является цифра 9.

3) 4 6 9 _ _ _ ...

теперь подходящих нам двузначных чисел, начинающихся на 9, два: 92 и 95, т.е. четвертой цифрой может быть 2 или 5.

Чистовик лист 2

Задача 2.

а) рассмотрим вариант, когда четвертая цифра - цифра 2:

такими же рассуждениями, как в пункте 1, 2, мы придем к тому, что пятой цифрой может быть исключительно цифра 3, тогда шестой цифрой - цифра 8:

4 6 9 2 3 8 _ _ ...,

но нет ни одного подходящего нам двузначного числа, которое начинается цифрой 8 => такой вариант (когда четвертая цифра - цифра 2) ~~нам не подходит~~ таков, что число имеет до ~~??~~ 6 разрядов.

б) теперь рассмотрим вариант, когда четвертая цифра - цифра 5:

такими же рассуждениями, как в пунктах 1 и 2, мы придём к тому, что пятой цифрой является цифра 7, а шестой цифрой - цифра 6:

4 6 9 5 7 6 _ _ _ ...

понятно, что после цифры 6 можно поставить только цифру 9, а далее будет всё так же, как описано ранее:

или $\overline{4692}$ (I)

или $\overline{469576957....}$ (II)

такую растановку цифр, как в (I) можно использовать только в конце, а все "серединные" цифры - повтор растановки (II)

Чистовик лист 5

Чистовик

Чистовик лист 3

Задача 2

первые 5 цифр: 46957

последующие 2012 цифр: $\underbrace{...69576957...6957}_{2012}$ → т.е. $503 \times \overline{6957}$

остается 5 последних цифр:

$\underbrace{46957}_{5}\underbrace{69576957...6957}_{2012}\underbrace{-----}_{5}$

на этих последних 5 местах могут стоять:

6 9 5 7 6 или 69238

т.е. последней цифрой может быть 6 или 8

Ответ: 6 или 8.

Задача 3

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-x^7}}$;

2) $f(f(x)) = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-\left(\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}}\right)^7}} = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$

$= \sqrt[7]{\dfrac{1}{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\dfrac{1-x^7}{-x^7}}$;

3) $f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-\left(\sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}}\right)^7}} = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-\frac{1-x^7}{-x^7}}} =$

$= \sqrt[7]{\dfrac{1}{\frac{-x^7-1+x^7}{-x^7}}} = \sqrt[7]{\dfrac{x^7}{1}} = \sqrt[7]{x^7} = x$;

Чистовик лист 5

Чистовик лист 4

Задача 3

4) $f(f(f(f(x)))) = \sqrt[7]{\dfrac{1}{1-x^7}}$,

т.е. повторяется каждые 3 функции $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1304 \underset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{f(f(f(f\dots(f(x)))\dots))}_{1304 \text{ раза}} = f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}};$$

$$\underbrace{f(f(f\dots(f(f(2022)))\dots))}_{1304 \text{ раза}} = f(f(2022)) =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{1-2022^7}{-2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

Чистовик лист 5

Задача 1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}};$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2};$$

1) рассмотрим число A:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{3+2\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1 \Leftrightarrow \underline{A = 1}$$

2) рассмотрим число B:

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2};$$

каждое из слагаемых имеет вид $\cancel{\frac{n+(n+1)}{(n\cdot(n+1)^2)}}$ $\frac{n+(n+1)}{(n\cdot(n+1))^2}$;

$$\frac{n+(n+1)}{(n\cdot(n+1))^2} = \frac{n}{n^2\cdot(n+1)^2} + \frac{n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{n\cdot(n+1)^2} + \frac{1}{n^2\cdot(n+1)} = \frac{1}{n\cdot(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) =$$

Чистовик лист 6

Задача 1

$\ominus \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$,

тогда

$B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{117}{(58\cdot 59)^2}+\frac{119}{(59\cdot 60)^2}=$

$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{58^2}-\frac{1}{59^2}+\frac{1}{59^2}-\frac{1}{60^2}=$

$=1-\frac{1}{60^2}=1-\frac{1}{3600}=\frac{3599}{3600}$

тогда

$B=\frac{3599}{3600}<1=A \Rightarrow A>B$

Ответ: A больше.

Задача 6

$a\cdot ctg^3x+(2a^2-a-2)\cdot ctg^2x+(2-4a-2a^2)\cdot ctg\,x+4a=0$

$a\cdot ctg^3x-5a\cdot ctg^2x+4a+$

$+(2a^2+4a-2)\cdot ctg^2x-(2a^2+4a-2)\cdot ctg\,x=0$

$(ctg\,x-1)\cdot(a\cdot ctg^2x-4a\cdot ctg\,x-4a)+$

$+(ctg\,x-1)\cdot ctg\,x\cdot(2a^2+4a-2)=0$

Чистовик лист 7

Задача 6

$$(ctg\,x-1)\cdot\left(a\cdot ctg^2x \cancel{-4a\cdot ctg\,x} -4a + 2a^2\cdot ctg\,x \cancel{+4a\cdot ctg\,x} -2ctg\,x\right)=0$$

$$(ctg\,x-1)\cdot\left(a\cdot ctg^2x + (2a^2-2)\cdot ctg\,x -4a\right)=0$$

$$(ctg\,x-1)\cdot\left(ctg\,x+2a\right)\left(a\cdot ctg\,x-2\right)=0$$

тогда корни: $\left[\begin{array}{ll} ctg\,x=1 & \text{– I корень} \\ ctg\,x=-2a & \text{– II корень} \\ ctg\,x=\frac{2}{a}\ (a\neq 0) & \text{– III корень}\end{array}\right.$

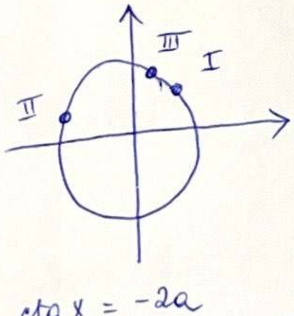
1) при $a=0$

уравнение становится квадратным, с корнями:

$\left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \\ ctg\,x=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{4} \\ x_2=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ расстояние $\Delta d=\frac{\pi}{4}$

2) при $a>0$ точки I, II и III – корни

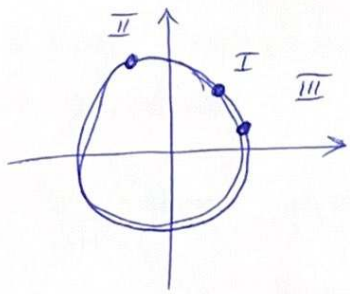
а) $a>2$



$\max\Delta d = d(\text{I и II}) > \frac{\pi}{4}$

т.к. $ctg\,x=-2a$, $ctg\,x=\frac{2}{a}$ имеют разные знаки, то один из корней лежит всегда в $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, а другой в другой четверти $\Rightarrow$ расстояние $>\frac{\pi}{4}$.

б) $a < 2$



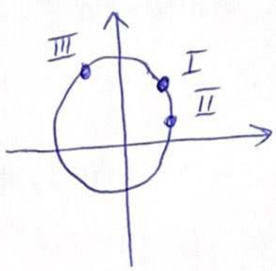
точки I, II и III - корни

$\max \Delta d = d(\text{II и III}) > \frac{\pi}{4}$

3) при $a < 0$

а) $a > -\frac{1}{2}$

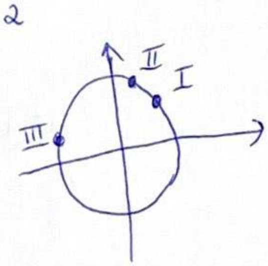
точки I, II и III - корни



$\max \Delta d = d(\text{II и III}) > \frac{\pi}{4}$

б) $a < -\frac{1}{2}$

точки I, II и III - корни



$\max \Delta d = d(\text{I и III}) > \frac{\pi}{4}$

Чистовик лист 9

Задача 6

таким образом $\max \Delta d = \frac{\pi}{4}$ при $a = 0$ – значение a, при котором наибольшее расстояние принимает наименьшее значение.

Ответ: $a = 0$; расстояние $\frac{\pi}{4}$.

Задача 5

$a = t^3 - 144t$

$b = 2^t - 256$

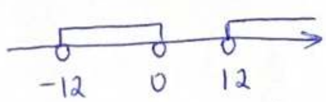
$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

найдем промежутки для $a > 0$
$b > 0$
$c > 0$

1) $a > 0$

$t^3 - 144t > 0$

$t(t-12)(t+12) > 0$



$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

2) $b > 0$

$2^t - 256 > 0$

$2^t > 256$

$2^t > 2^8$

$t > 8$

$t \in (8; +\infty)$

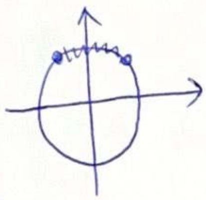
Чистовик — лист 10

Задача 5

3) $c>0$

$$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

$$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

рассмотрим все эти промежутки:

I) $t > 12$

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow$$ минимум 2 числа положительные ; т.е. среднее положительное

II) $t \le 12$ и $t \ge 0$

$a<0 \Rightarrow$ требуется $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases}$$

$b>0 \Rightarrow t \in (8;12]$

$c>0$, $t \in (8;12]$ т.е.

~~тогда~~ $\cancel{t \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; 8\right)}$ ~~тогда~~ $\cancel{t \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi; \frac{2\pi}{3}+2\pi\right)}$ V

$$\begin{cases} t \in (8;12] \\ t \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right) \end{cases}$$

при $k=1$, $t \in \left(8;\ \frac{8\pi}{3}\right)$

при $k=2$, не подходит

Чистовик лист 11

Задача 5

VI) $t<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow$ нужно, чтобы $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ c>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow t\in(-12;0) \\ c>0 \Rightarrow t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t\in(-12;0) \\ t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right) \end{cases}$$

при $\underline{k=-1}$ $t\in\left(\frac{\pi}{3}-2\pi;\ \frac{2\pi}{3}-2\pi\right)$ полностью входит в $(-12;0)$,

~~при k < -1 или k > -1, не подходит~~

$\cancel{\Rightarrow t\in\left(\frac{\pi}{3}-2\pi;\ \frac{2\pi}{3}-2\pi\right)}$.

при $\underline{k=-2}$ $\underline{t\in\left(\frac{\pi}{3}-4\pi;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi\right)}$

Ответ:

$$t\in\left(\frac{\pi}{3}-4\pi;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}-2\pi;\ \frac{2\pi}{3}-2\pi\right)\cup\left(8;\ \frac{8\pi}{3}\right)\cup(12;+\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$$t\in\left(-\frac{11\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(8;\ \frac{8\pi}{3}\right)\cup(12;+\infty)$$

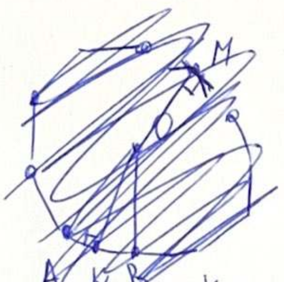
Черновик лист 12

Задача 6

соприкасаясь, шары одинакового радиуса образуют правильный 17 угольник;

величина угла в этом многоугольнике $\varphi = \frac{15}{17}\pi$,

а сторона $\underline{a = 2r = 4}$



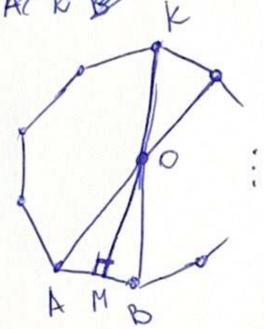
пусть O – его середина;

$AB = 4$

$KM \perp AB$, $AM = MB$

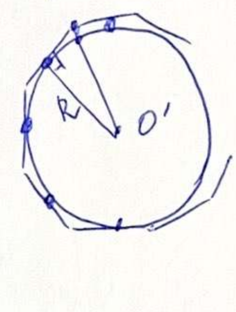
$KM = KO + OM = OA + OM$

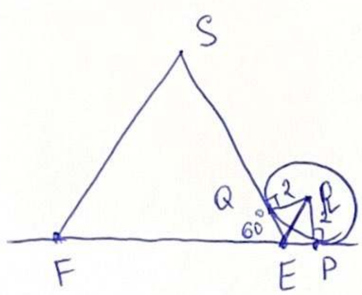
$\angle OBM = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow OB = \frac{BM}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{2}}$



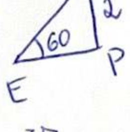
$OM = BM \cdot tg\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$

основание конуса вписано в данный многоугольник:





угол $\angle SFE = \angle SEF = 60° \Rightarrow \Delta SFE$ - правильный $\Rightarrow \angle QER = \angle REP = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ERP = 30° \Rightarrow RE = 2EP$:



$\Rightarrow RE = \frac{2}{\sin 60°} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

тогда $R + \frac{2\sqrt{3}}{3} = OB = \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow \underline{R = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

Ответ: $\cancel{\frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ $\left(\frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$