



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ширкунова Мария Михайловна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

№1.

№ случая	без грани с числом	вспомогательные грани с числами	произведение	остаток
1	6	1, 2, 3, 4, 5	120	8
2	5	1, 2, 3, 4, 6	144	0
3	4	1, 2, 3, 5, 6	180	4
4	3	1, 2, 4, 5, 6	240	0
5	2	1, 3, 4, 5, 6	360	8
6	1	2, 3, 4, 5, 6	720	0

Возможны 6 случаев, приведенных в таблице (когда не видно грани с числом 1 или 2 или 3 или 4 или 5 или 6) или 7 ат. Перемножив эти числа и разделив <sup>произведение</sup> на 16, <sup>видим, что</sup> без остатка <sup>разделилось</sup> лишь 3 из 6 случаев. Тогда найдём вероятность:

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Ответ: 0,5.

№9. Рассмотрим степени 9.

показатель степени	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
три последние цифры	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420499	3486784401	31401006549	282875168941	2539132520529

Заметьте, что на последние 3 цифры степени 9 роль играют 2 цифры показателя степени. И-е. последние 3 цифры  $9^{2k}$  совпадают с теми же цифрами  $9^{2l}$ . Продолжим заполнить таблицу, зная, что 3 цифры из предыдущего столбца не 9 и заменив их в следующем 3 последние цифры нулевыми произведем.

показатель степени	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
3 последние цифры	9	6	8	5	1	0	8	2	8	...
	6	4	4	6	2	8	0	0	8	...
	1	9	1	9	1	9	1	9	1	...

Получаем  $9^{22} = \dots 881 \Rightarrow 9^{2022} = \dots 881$ .

$10^{2022} = \dots 1$  и  $22 \cdot 0$ . Тогда:

$$\begin{array}{r} \dots 0000 \\ \dots 881 \\ \hline \dots 119 \end{array}$$

Ответ: 119

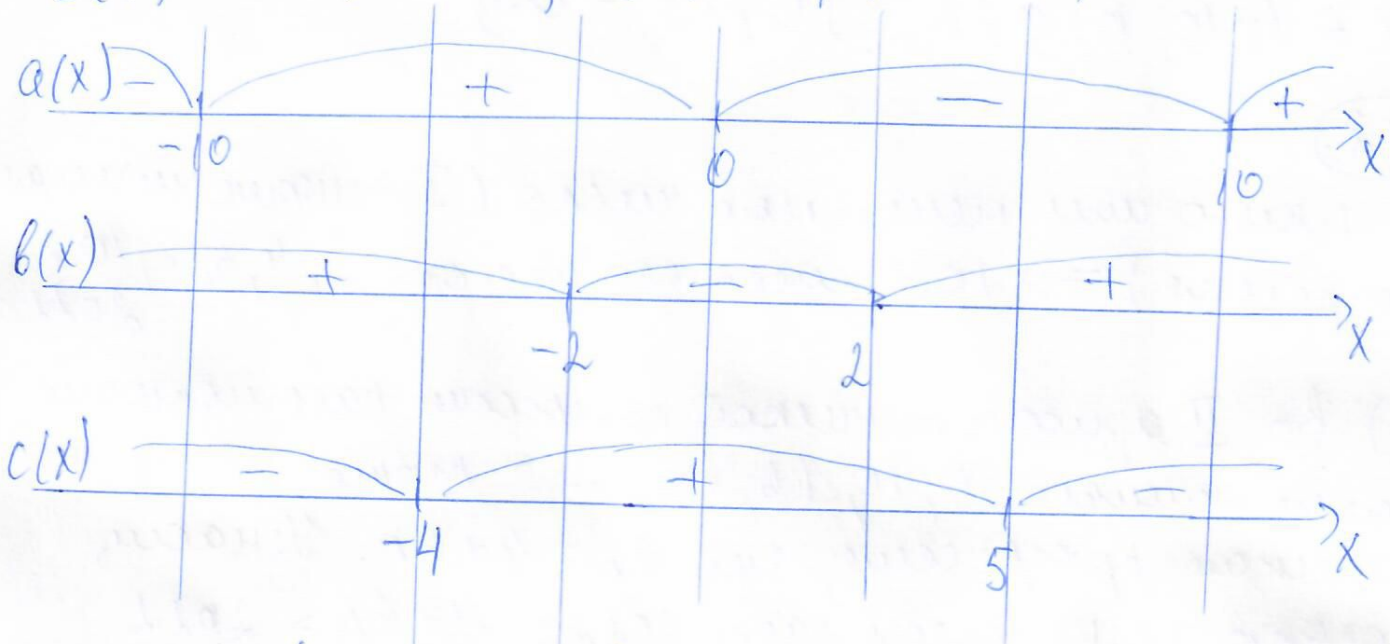


№5) Чтобы из трёх упорядоченных чисел среднее было положительным, хотя бы два из этих чисел должны были быть положительными.

$$a(x) = x^3 - 100x; \quad a(x) = 0, \text{ при } x = 0; \pm 10.$$

$$b(x) = x^4 - 16; \quad b(x) = 0, \text{ при } x = \pm 2$$

$$c(x) = x + 20 - x^2, \quad c(x) = 0, \text{ при } x = 5, -4.$$



при  $x \in (-\infty; -10)$  1 число положительное

при  $x \in (-10; -4)$  2 числа положительны

при  $x \in (-4; -2)$  3 числа положительны

при  $x \in (-2; 0)$  2 числа положительны

при  $x \in (0; 2)$  1 число положительное

при  $x \in (2; 5)$  2 числа положительны

при  $x \in (5; 10)$  1 число положительное

при  $x \in (10; +\infty)$  2 числа положительны.

при  $x = -10$ :  $a = 0$   $b > 0$   $c < 0$   $\emptyset$

при  $x = -4$ :  $a > 0$   $b > 0$   $c = 0$   $\boxed{+}$

при  $x = -2$ :  $a > 0$   $b = 0$   $c > 0$   $\boxed{+}$

при  $x = 0$ :  $a = 0$   $b < 0$   $c > 0$   $\emptyset$

N5 - продолжение.

при  $x=2$ :  $a < 0$   $b = 0$   $c > 0$   $\emptyset$

при  $x=5$ :  $a < 0$   $b > 0$   $c = 0$   $\emptyset$

при  $x=10$ :  $a = 0$   $b > 0$   $c < 0$   $\emptyset$

Следовательно:

$$x \in (-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$$

N2.

1) Исключили нечётные числа (I арифметическая прогрессия)  $\Rightarrow$  1011 чисел остаётся: 2, 4, 6, 8, 10, ... 2022.

2) Во II арифметической прогрессии рассмотрим чётные члены. 4, 10, 16, 22, ... - тоже арифметическая прогрессия, где  $a_n = 4 + 6n$ . Узнаем, сколько их не превышает 2022:  $4 + 6n \leq 2022$   
 $6n \leq 2018$   
 $n \leq 336 \frac{1}{3}$

$$n = 336 + a_0 \Rightarrow 337 \text{ чисел (можно исключить)}$$

3)  $1011 - 337 = 674$  числа.

Ответ: 674.



1 2 3 4 5 6 Среднее  
 9 81 729 6561

6 чет. степ. зан. ме 9  
 6 чет. ме 1

10000...00 - 881  
 = ..... 9

17	18	19	20	21	22
881	881	881	881	881	881

1000000  
 881  
 ---  
 119

~~648~~

922  
 >

(3)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420499	3486834401	31394389641	282673736761	2543882125401	22870047100641	205145224410041	1834703216514801

026046280082

Заметим, что последние 3 цифры  
 равны обратн 2 <sup>последние</sup> цифрам показателя степени  
 степеней 9

Т.е. последние цифры 9<sup>2022</sup> совпадают с  
 цифрами 9<sup>222</sup>. Продолжим заполнять таблицу  
 возможное 3 цифры из предыдущего столбца  
 не 9. Получаем 9<sup>22</sup> = ... 881.

9<sup>22</sup>  
 = 14  
 22 цифр  
 тогда:  
 1.000  
 - 881  
 ---  
 119

Ответ: 119

# ЧЕРНОВАК

$$a = x^3 - 100x$$

$$b = x^4 - 16$$

$$c = x + 20 - x^2$$

$$x^3 - 100x \leq x^4 - 16 \leq x + 20 - x^2$$

$$x^3 - 100x - x^4 + 16 - x - 20 + x^2 \leq 0$$

$$-x^4 + x^3 + x^2 - 101x - 4 \leq 0$$

$$\leq x^3 - 100x \leq$$

$$9,4 \quad 9,525$$

$$\frac{40}{50} = \frac{9+15-x}{x}$$

$$40x = 95 + 75 - 5x = 9x$$

$$\frac{40}{3 \cdot 50} = \frac{32}{3 \cdot 40} = \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 5}$$

$$9x = 120$$

$$x = \frac{120}{9} = 13\frac{1}{3}$$

$$15 - 13\frac{1}{3}$$

$$= \frac{8}{15} = 0,533$$

$$\frac{2}{3} + 9 = 10\frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\frac{40}{3 \cdot 50} + \frac{32}{3 \cdot 40} =$$

$$= \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 15} = \frac{8}{15} \approx 0,533$$

$$\frac{16}{40} + \frac{14}{50} = 0,53$$



ЧЕРМОБУК

$$x = -4y^2 + 2$$

$$-4y^2 = x - 2$$

~~$$-3x^2 + 2$$~~

$$y = -3x^2 + 2 \quad \uparrow^2$$

$$y^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$$

$$-4y^2 = -36x^4 + 48x^2 - 16$$

$$-36x^4 + 48x^2 - 16 = x - 2$$

$$-36x^4 + 48x^2 - x - 14 = 0$$

$$x^4 - 16x \geq 0 \quad x > 0$$

$$x^3 - 100x < x^4 - 16x < x + 20 - x^2$$

$$x(x^2 - 100) < x(x^3 - 16) < x(-x + 1) + 20$$

$$a = x^3 - 100x$$

$$b = x^4 - 16x$$

$$c = x + 20 - x^2$$

$$a < b < c$$

$$c < b < a$$

$$b < a < c$$

$$c < a < b$$

$$a < b < c$$

$$b < c < a$$

№	случай	остаток	черновик проб	всего	без
1		8	120	12 <sup>24</sup> 345	6
2		0	144	12 <sup>24</sup> 346	5
3		4	180	12356	4
4		0	240	12 <sup>8</sup> 4 <sup>40</sup> 56	3
5		3	360	12 <sup>12</sup> 60	2
6		0	720	6 <sup>24</sup> 3456	1

Возможно 6 случаев, при ведении в таблице (когда не верно грани с числом 1 или 3 или 4 или 5 или 6).  
 Перенесем эти числа и разделим на 6, без остатка поделились лишь 3 из 6 случаев. Тогда  $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ .

Ответ: 50%.

(12)

ЧЕРНОВИК

10  
4

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1) сколько раз все переставил

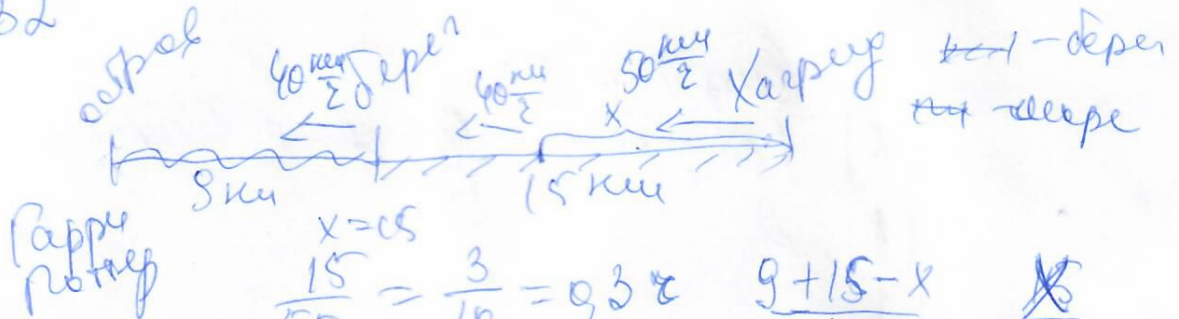
$$2022 - \frac{2022}{2} = 1011 \text{ разов}$$

остается

2) сколько раз какое третье число, начиная с 1.

20

$$\frac{24}{75} = 0,32$$



$$x = 15$$
$$\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{9+15-x}{40} = \frac{x}{50}$$

$$\frac{24}{40} = 0,6$$

$$\frac{24-x}{40} = \frac{x}{50}$$

$$\frac{8^4}{3 \cdot 25} + \frac{24-13\frac{1}{2}}{40}$$

$$t = 0,525$$

$$\frac{24-x}{40} \cdot \frac{x}{50} = \frac{24 \cdot 5 - 5x - 4x}{200}$$

$$\frac{2\frac{2}{3}}{50} = \frac{10\frac{2}{3}}{40^2}$$

$$\frac{5}{50} = 0,1$$

$$\frac{18}{40} = 0,475$$

$$= \frac{120-8x}{200} = 0$$

$$= \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 40} =$$

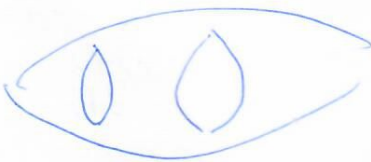
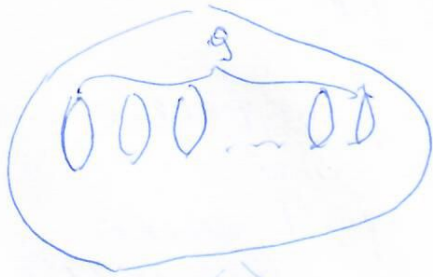
$$\frac{4}{3 \cdot 5}$$

$$t = 0,575$$
$$\frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{4+4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{24}{75}$$

$$8x = 120$$
$$x = \frac{120}{8} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



# ЧЕРМОВИК



1) 9 вклетке I

2) 8 вклетки + вклетки I

3) 7 ————— вклетки I

4) 6 ————— вклетки I

5) 5 ————— вклетки I

6) 4 ————— вклетки I

7) 3 ————— вклетки I

8) 2 ————— вклетки I

9) 1 ————— вклетки I

(10)	вклетки I:	8	группы вклетки
(11)	1 отучено	7	
(12)	2	6	
(13)	3	5	
(14)	4	4	
(15)	5	3	
(16)	6	2	
(17)	<del>7</del>		
(18)	<del>8</del>		
(19)	<del>9</del>		
(20)	<del>10</del>		
(21)	вклетки I		