МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Яковлев Максим Олегович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	5	5	15

№1 Чистовик #1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}.$$

рассмотрим:

$$\frac{x^2-1}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-1)(x+1)^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^4+2x^3+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-\cancel{1}+\cancel{2x}+\cancel{1}}{x^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{8}{3^2} \quad (x=2)$$

$$\frac{8}{3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} = \frac{15}{4^2} \quad (x=3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{59^2-1}{59^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{60^2-1}{60^2} \quad (x=59)$$

$$B = \frac{60^2-1}{60^2} < 1 = A$$

Ответ: A больше B

Чистовик 2

№2

Двузначные числа $\vdots 23$:

23; 46; 69; 92.

Двузначные числа $\vdots 19$:

19; 38; 57; 76; 95.

Первая цифра 4. Значит вторая очевидно 6. Третья аналогично 9 (т.к. из 2-значных чисел, начинающихся с 5 только 69 $\vdots$ 23 или $\vdots$ 19). Четвертая аналогично или 2, или 5. Допустим, что 2 => пятая 3 => шестая 8 => противоречие, т.к. не сущ-ет нужной седьмой цифры, что-бы 8_ было $\vdots 19$ или $\vdots 23$ => четвертая цифра 5 => пятая 7 => шестая 6 => седьмая 9 => восьмая или 2, или 5, но по аналогии 2 не подходит => восьмая 5 и мы зациклились:

$46\underbrace{9576}\underbrace{9576}9\ldots$

Не считая первых 4 и 6 ещё есть 2019 цифр. ~~=> т.к. у нас цикл, то 2019-ая 9 (9 стоит~~

Рассмотрим их цифры, которые стоят на местах, которые $\equiv 1 \pmod 4$ - это 9 => 1-ая 9; 5-ая 9, ... 2017-ая 9. 2018-ая или 2, или 5 (т.к. теперь рассуждение написанное выше не работает) => 2019-ая (искомая) - или 3, или 7.

Ответ: или 3, или 7

Чистовик 3

Чистовик 4

№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-f(x)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}}=\frac{1}{\frac{x}{\sqrt[7]{x^7-1}}}=\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-f(f(x))^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{\cancel{x^7}-\cancel{x^7}+1}{x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-f(f(f(x)))^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}=f(x)$$

$$\underbrace{f(f\ldots f}_{1304}(2022)\ldots)=\underbrace{f(f\ldots f}_{1301}(2022)\ldots)=\ldots$$

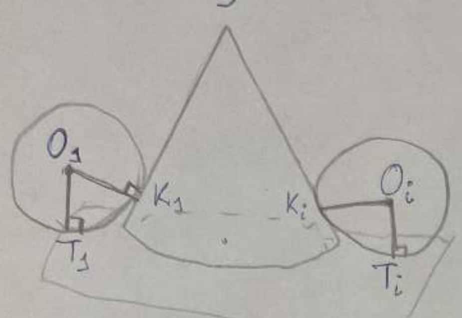
$$\ldots=f(f(2022))=\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}=\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

т.к. $1304 \underset{3}{\equiv} 2$

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Чистовик 5

№4



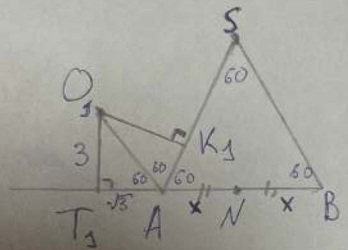
Центры шаров: $O_1, \dots, O_{11}$; $R=3$.

Они кас-ся пл-ти осн-я в $T_1, \dots, T_{11}$ соответственно

S - вершина конуса

$K_1, \dots, K_{11}$ - точки кас. боковой пов-ти конуса.

Пл-ть с S, O_1, T_1, K_1:



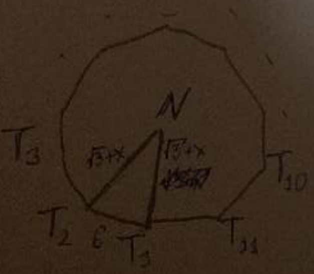
AO - бисс. $\angle T_1AS \Rightarrow \angle T_1AO = \angle SAO = 60^\circ$

$OT_1 = OK_1 = R = 3$.

Из $\triangle OAT_1$ $OA = 2AT_1$: $4AT_1^2 = 9 + AT_1^2 \Rightarrow AT_1 = \sqrt{3}$

N - середина AB $\Rightarrow$ N - центр окр-ти осн-я конуса; пусть радиус этой окр-ти x.

Рассмотрим $T_1 \dots T_{11}$:



расстояние от N до каждого из T_i: $\sqrt{3}+x \Rightarrow T_1N = T_2N = \sqrt{3}+x$

$T_1T_2 = T_2T_3 = \dots = T_{11}T_1 = 6$ (т.к. $O_1O_2 = \dots = O_{11}O_1 = 6$).

$\angle T_1NT_2 = \dots = \angle T_{11}NT_1$; $\angle T_1NT_2 + \dots + \angle T_{11}NT_1 = 360 \Rightarrow \angle T_1NT_2 = \frac{360}{11}$

~~Из~~ Чистовик 6

Из $\Delta T_1 N T_2$:

$\cancel{\sin\left(\frac{360^\circ}{11}\right)} = \sin\left(\frac{360^\circ}{11}/2\right) = \frac{3}{\sqrt{3}+x}$

$$\boxed{x = \frac{3}{\sin\left(\frac{180}{11}\right)} - \sqrt{3}}$$

9

Чистовик 7

№5

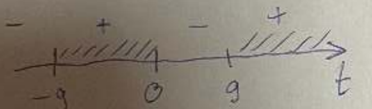
Переформулируем задачу:
при каких t хотя 2 числа из a, b, c положительны.

Найдём при каких t положительно каждое из a, b, c:

I $a>0$

$t^3-81t>0$

$t(t-9)(t+9)>0$



$t\in(-9;0)\cup(9;+\infty)$

II $b>0$

$11^t-121>0$

$11^t>11^2$

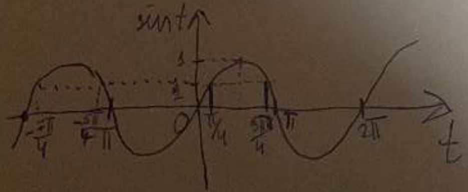
$t>2$

$t\in(2;+\infty)$

III $c>0$

$\sin t-\frac{1}{2}>0$

$\sin t>1/2$



$t\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$

$k\in\mathbb{Z}$

Чистовик 8

I $a, b > 0$

$t \in ((-9;0) \cup (9;+\infty)) \cap (2;+\infty)$

$\underbrace{t \in (9;+\infty)}$

II $a, c > 0$

$t \in ((-9;0) \cup (9;+\infty)) \cap (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$

$t \in (9;+\infty)$ – уже подходит => этот интервал можно не рассматривать.

$t \in (-9;0) \cap (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$

$\frac{3\pi}{4} - 4\pi < -9$ $\quad (-\frac{13}{4}\pi < -9 \quad \frac{13}{4}\pi > 9 \quad \pi > \frac{36}{13})$

$\frac{\pi}{4} - 2\pi > -9$ $\quad (-\frac{7}{4}\pi > -9 \quad 9 > \frac{7}{4}\pi \quad \pi < \frac{36}{7})$

$\frac{\pi}{4} > 0$

$\Downarrow$

подходит лишь $k = -1$

$\underbrace{t \in (-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4})}$

III $b, c > 0$

$t \in (2;+\infty) \cap (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$

аналогично $t \in (9;+\infty)$ не рассматриваем

Чистовик 9

$t \in (2; 9] \cap \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$k = 0$ – не достаточно (т.к. $2 > \frac{3\pi}{4}$)

$k = 1$: $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} > \frac{9 \cdot 3}{4} = \frac{27}{4} > 2$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} < \frac{11 \cdot 3{,}2}{4} = 11 \cdot 0{,}8 = 8{,}8 < 9$

$k = 2$ – слишком много (т.к. $4\pi + \frac{\pi}{4} > 9$)

Итого:

$t \in \left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right)$

Ответ: $t \in \left(-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right) \cup (9; +\infty)$.

№6 Чистовик 10

$a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)ctgx+$
$+4a=0$

$ctgx=1$ – корень

$$
\begin{array}{l|l}
a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)ctgx+4a & ctgx-1 \\
\hline
a\,ctg^3x-a\,ctg^2x & a\,ctg^2x+(2a^2-2)\cdot ctgx-4a \\
\quad (2a^2-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)ctgx & \\
\quad (2a^2-2)ctg^2x-(2a^2-2)ctgx & \\
\quad\quad -4a\,ctgx+4a & \\
\quad\quad -4a\,ctgx+4a & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$(ctgx-1)(a\,ctg^2x+(2a^2-2)ctgx-4a)=0$

$D=4(a^2-1)^2+4\cdot 4a\cdot a)=4(a^4-2a^2+1+4a^2)=4(a^2+1)^2$

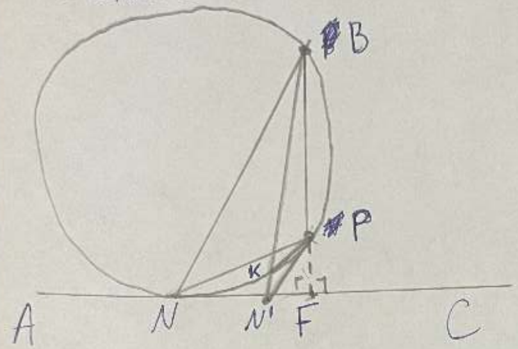
$ctgx=\frac{2-2a^2\pm(2a^2+2)}{2a}=\frac{1-a^2\pm(a^2+1)}{a}=\frac{2}{a};-2a$

$(ctgx-1)(a\,ctgx-2)(ctgx+2a)=0$

$\left[\begin{array}{ll} ctgx=1 & \Rightarrow x=\pi/4+\pi k \\ ctgx=2/a & \Rightarrow x=arcctg(2/a)+\pi k \\ ctgx=-2a & \Rightarrow x=arcctg(-2a)+\pi k \end{array}\right.$ $(k\in Z)$

№7

Вспомогательные сведения:



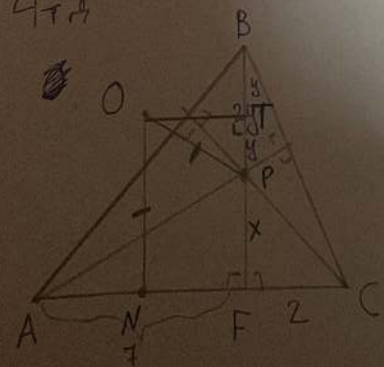
Поймём, где именно на AC находится N. Проведём окр-ть ω через B и P, которая кас-ся AC. Докажем, что она кас-ся в N. (искомых точки очевидно хотя бы две; мы смотрим на точки на луче FA, чтобы было удобнее)

Допустим, что есть N' такая что $\angle BN'P > \angle BNP$.

I. $N' \in NF \Rightarrow \underbrace{\angle PN'B} = 180 - \angle N'PK - \angle N'KP < 180 - \angle N'KP =$
$BN' \cap \omega = K$ $\qquad = 180^\circ - (180^\circ - \angle BKP) = \angle BKP = \underbrace{\angle BNP}$

II. $N' \in NA$ аналогично I.

Чтд



Пусть $BP = 2y$; $PF = x \Rightarrow BF = x + 2y$. O – центр ω. $O \in$ сер. пер. BP; пусть T – сер. $BP \Rightarrow PT = y \Rightarrow$
$\Rightarrow TF = x + y \Rightarrow ON = TF = x + y \Rightarrow$
$\Rightarrow OP = ON = x + y$ (т.к. OP, ON – радиусы);
$OT = \sqrt{(x+y)^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + 2xy} \Rightarrow$
$\Rightarrow NF = OT = \sqrt{x^2 + 2xy}$ (т.к. NFTO – прямоугольник)

Чистовик 12

$NF = \sqrt{x^2+2xy}$

Заметим, что $\triangle PFC \sim \triangle AFB$ (по 2-м $\angle$).

Значит $\frac{PF}{FC} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{7}{x+2y} \Rightarrow x^2+2xy = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow NF = \sqrt{14}$ (а $\sqrt{14} < 7 \Rightarrow N \in AC$ (отрезку) и противоречий в этом нет)

Ответ: $\sqrt{14}$.