**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Аленчиков Александр Васильевич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Аленчиков Александр Васильевич

Класс: 10-11

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Задача 6** | **Тех. балл*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 баллов | 15 баллов | 15 баллов | 15 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 100 баллов |

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

№1. Вариант 221 Чистовик 1.

$v = a \cdot t$

$\frac{100000}{3600} = a \cdot 15 \Rightarrow a = 1{,}85 \left(\frac{м}{с^2}\right)$, тогда

$S = \frac{at^2}{2} = \frac{1{,}85 \cdot 15^2}{2} \approx 208$ (м)

Ответ: 208 м

№3

~~[illegible]~~

Обозначим емкость батареи смартфона за 1 условную единицу (у.е.) Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна $\frac{1}{3}$ у.е./час, а скорость разрядки смартфона при игре равна $\frac{1}{5}$ у.е./час. Пусть * всё время в пути равно $t$ часов. Тогда можем составить уравнение: $\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{t}{2}$. Отсюда $\frac{t(5+3)}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1 \Rightarrow t = \frac{15}{4}$ часа.

Пусть весь путь равен S. Тогда можем составить уравнение:

$$\frac{S}{2 \cdot 80} + \frac{S}{2 \cdot 60} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{S}{40} + \frac{S}{30} = 15$$

$S = \frac{1800}{7} \approx 257$ (км)

Ответ: 257 км

N2 Чистовик 2.

Пусть в прямоугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке O. Тогда расположим прожекторы на потолке над точками, являющимися серединами отрезков AO, BO, CO и DO на высоте, равной одной четвертой длины диагонали прямоугольника. Тогда первый прожектор полностью осветит круг, в котором находится прямоугольник с диагональю AO. Второй прожектор осветит прямоугольник с диагональю BO и т.д. В данном случае всё поле будет освещено. Значит высота потолка равна $\frac{\sqrt{90^2+60^2}}{4} = \frac{15}{2}\sqrt{13}$ м

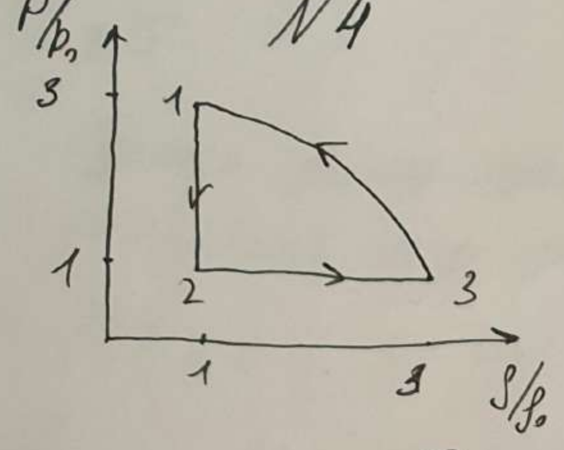
Докажем, что более выгодного расположения нет, тогда воспользуемся принципом Дирихле. Возьмем пять точек на поле: A, O, B, C, D (важно, что расстояние между любыми двумя из этих точек было не меньше половины длины диагонали прямоугольника) и предположить, что диаметр круга будет меньше половины длины диагонали прямоугольника. Тогда один прожектор будет освещать не более чем одну точку из четырех => Хотя бы одна точка из пяти будет неосвещена. Осталось оценить сверху величину. $\frac{15}{2}\sqrt{13}$

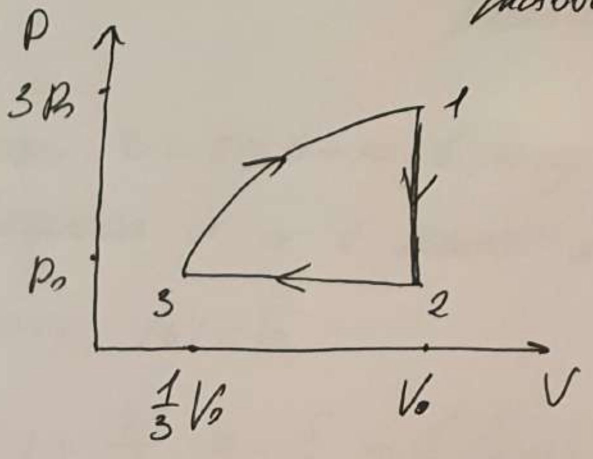
$\frac{15}{2}\sqrt{13} = 731,25$, $27^2 = 729 < 731,25 < 734,41 = 27,1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Высота потолка равна 27,1 (м)

Ответ: 27,1 м

№ 4 Участник 3.





## Решение:

$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$, где $T_1$ - max, $T_3$ - min

$\eta = \frac{1}{8}\cdot\eta_{max} = \frac{1}{8}\left(\frac{T_1 - T_3}{T_1}\right)$

$\eta = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)$

По закону Клапейрона-Менделеева:

$PV = \nu RT$

$T_1 = \frac{3P_0V_0}{\nu R}$

$T_3 = \frac{P_0\frac{1}{3}V_0}{\nu R} = \frac{P_0V_0}{3\nu R}$

$\Rightarrow \eta = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\cancel{P_0V_0}\,\cancel{\nu R}}{3\cancel{\nu R}\,3\cancel{P_0V_0}}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$\eta = \frac{1}{9}$

[redacted]

Ответ: $\frac{1}{9}$

№5 Чистовик 4

Сделаем замену переменной $z = \sin t + \cos t$, тогда $z^2 = 1 + 2\sin t \cos t$, тогда зависимость $x$ от $t$ имеет вид: $x(t) = 3 + \frac{z^2-1}{2} - z$, $z = \sin t + \cos t$, $|z| \le \sqrt{2}$

Функция $f(z) = 3 + \frac{z^2-1}{2} - z = \frac{z^2}{2} - z + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(z-1)^2 + 2$ – парабола с вершиной $z_0 = 1$ и имеющая минимум в этой вершине, равный 2.

Т.к. $|z| \le \sqrt{2}$, то минимальное значение функции достигается в вершине, а максимальное при $z = -\sqrt{2}$

Значит область значения функции есть отрезок $[2; \frac{7}{2} + \sqrt{2}]$

Частица в разные моменты времени пробегает все точки отрезка $AB$, где $A(2;1)$ и $B(\frac{7}{2} + \sqrt{2}; 1)$

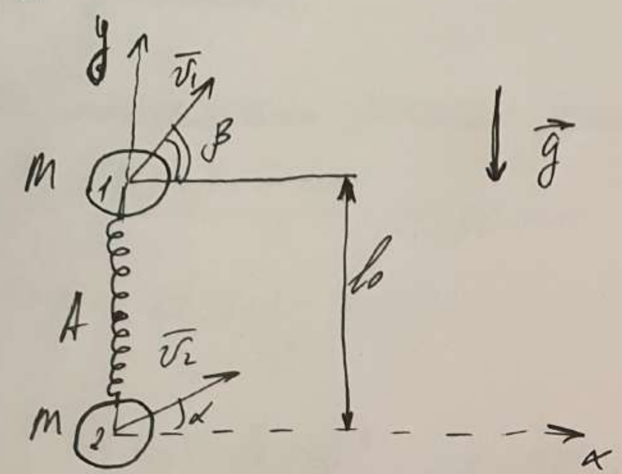
Данный в задаче луч проходит ~~[illegible]~~ через точку $A$ при $c = \frac{1}{2}$, а через точку $B$ при $c = \frac{1}{\frac{7+2\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(7-2\sqrt{2})}{41}$

$\Rightarrow$ При $c \in [\frac{2(7-2\sqrt{2})}{41}; \frac{1}{2}]$ существует хотя бы один момент времени, в который данная частица оказывается лучом.

Ответ: $c \in [\frac{2(7-2\sqrt{2})}{41}; \frac{1}{2}]$

## №6

Чистовик 5



### Решение:

~~1) Точка А всё время лежит~~

1) Центр масс всё время лежит в т. А. Пусть радиус-векторы точек с массами $r_1(x_1;y_1)$ и $r_2(x_2;y_2)$. То радиус-вектор центра масс находится следующим образом: $r_c = \frac{mr_1+mr_2}{m+m} = \frac{r_1+r_2}{2}$

⇒ Центр масс всегда будет лежать в т. А.

2) По 2-ому закону Ньютона для движения центра масс (действуют только внешние силы ~~в~~ относительно системы двух тел на пружине)

$2m\bar{a} = 2m\bar{g} \Rightarrow \bar{a} = \bar{g}$

⇒ движение центра масс равноускоренное:

$\overline{r_c}(t) = \overline{r_{c0}} + \overline{v_{c0}}\cdot t + \frac{\bar{g}t^2}{2}$

3) Найдем начальную скорость из (1):

$\overline{v_{c0}} = (\overline{r_c})' = \left(\frac{\overline{r_1}+\overline{r_2}}{2}\right)' = \frac{\overline{v_{10}}+\overline{v_{20}}}{2}$

4) Найдем перемещение центра масс на проекции вертикального направления y

$Oy: y_c = y_{c0} + v_{c0}t - \frac{gt^2}{2}$

$v_{c0} = \frac{v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha}{2}$

$y_c - y_{c0} = \frac{v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha}{2}\cdot t - \frac{gt^2}{2}$

№6 (продолжение). Чистовик 6

Найдем максимальное значение функции

$$(y_c - y_{c_0})' = \frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2} - gt = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2g}$$

$$(y_c - y_{c_0}) = \frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{4g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2g}\right)^2 =$$

$$= \frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{8g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$$

Ответ: $\frac{1}{2g}\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}\right)^2$

Черновик 7

$\frac{100000}{3600} =$

$v = a \cdot t$

$\frac{100000}{3600} = a \cdot 15$

$a = \frac{\overset{500\ 250\ 125}{\cancel{1000}}}{\cancel{36} \cdot \cancel{15}_3} = \frac{125}{18}$

$\cancel{18}_9$

$a = \frac{\overset{200\ 100\ 50}{\cancel{1000}}}{\cancel{36} \cdot \cancel{15}_3}$

$\cancel{18}_9$

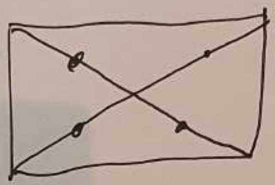
~~125|18~~

$50 \times 22$ $\quad 27 \times 2 = 54$

$15 \times 15$: 75, 15, 225

$225 \times 185$: 1125, 1800, 225, 416,25

~~13~~ $\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{t}{2} = 1$



$\frac{5t+3t}{2\cdot3\cdot5} = 1$

$\frac{8100+3600}{4} = \frac{\cancel{11700}}{\cancel{4}}$ $\quad$ 2925 $\quad$ ~~5850~~

$\frac{t(5+3)}{2\cdot3\cdot5} = 1$

$t(5+3) = 2\cdot3\cdot5$

$t = \frac{\cancel{2}\cdot5\cdot5}{8_4} =$

$541 \times 541$: 541, 2164, 2705, 2926,81

$271 \times 271$: 271, 1897, 542

$2925 : 225 = 13$; $-225$, 675

$54 \times 54$: 216, 270, 2516

$52 - 25 = 27$

$\frac{S}{180} + \frac{S}{2\cdot60} = \frac{15}{4}$

$\frac{S}{40}^{\,3} + \frac{S}{30}^{\,4} = 15$

$27 \times 27$: 189, 54, 729

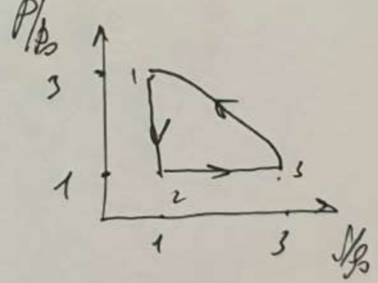
$271 \times 271$: 271, 1897, 542, 73441

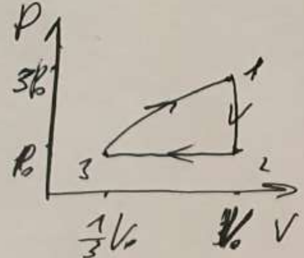
$\frac{7S}{120} = 15$ $\quad$ $120 \times 15$: 600, 120, 1800 $\quad$ $1800 : 7 = 257$; $-14$, 40, $-35$, 50

~~15~~

$S = \frac{1800}{7}$

Черновик 8





$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$

$\eta = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)$

По ур. [illegible] Менделеева

$pV = \nu RT$

$T_1 = \frac{3P_0V_0}{\nu R}$

$T_3 = \frac{P_0\frac{1}{3}V_0}{\nu R} = \frac{P_0V_0}{3\nu R}$

$\sqrt{\frac{225\cdot 13}{4n}\cdot 25}$

$\times 225$

325
×225
1625
650
650
731,25

13
×25
65
26
325

271
×271
271
1897
542
734,41

$3 + \sin t\cdot\cos t - \sin t - \cos t\ ,\ y(t) = 1.$

$z = \sin t + \cos t\ ,\ z^2 = 1 + 2\sin t\cos t$

$3 + \frac{z^2-1}{2} - z = 3 + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} - z = \frac{z^2}{2} - z + \frac{5}{2} =$ [illegible] $= \frac{1}{2}(z^2 - 2z + 1) =$

$= \frac{1}{2}(z-1)^2 + 2$

$\frac{\sqrt{90^2+60^2}}{4} = \frac{\sqrt{8100+3600}}{4} = \frac{10\sqrt{81+36}}{4} = \frac{10}{4}\sqrt{9(9+4)} = \frac{30}{4}\cdot\sqrt{13} =$

$= \frac{15}{2}\sqrt{13}$

$\frac{15}{2}\sqrt{13} = 731,27^2$

27
×27
189
54
729

~~271~~
~~271~~

271
×271
271
1897
541
23341