МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Венгерская Анна Сергеевна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Венгерская Анна Сергеевна

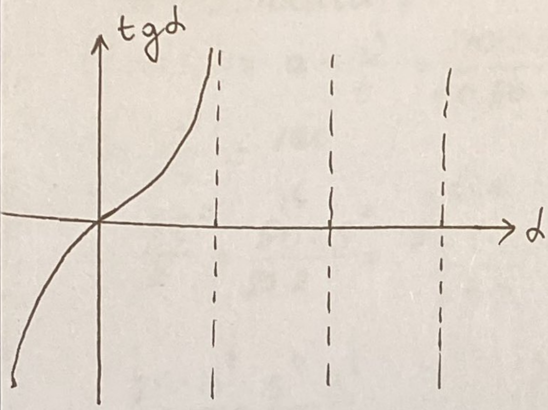
Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	5 баллов	80 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

~~Чистовик~~ Черновик

№ 1/4



$100 \mid 9$

$9 \quad 11,1$

10

9

10

$f(t) = 3 + \cancel{2}\sin t\cos t - \sin t - \cos t = \frac{1}{c}$

$f(t)'_t = -\cos t + \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t =$

$= \cos t(\cos t - 1) - \sin t(\sin t - 1)$

$(\sin t\cos t)' = \cos^2 t - \sin^2 t =$

$= \cos 2t$

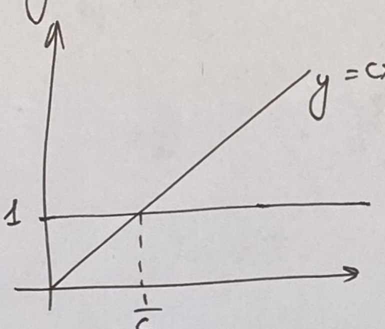
№4

$x(t) = 3 + \sin t\cos t - \sin t - \cos t \qquad y(t) = 1$

$\sin t - \cos t + \cos 2t = 0$

$\frac{\sin 2t}{2} \qquad 2 \cdot \frac{\cos 2t}{2} = \cos 2t$

$y = cx$



$3 + 2\sin t\cos t - \sin t\cos t - \sin t - \cos t =$

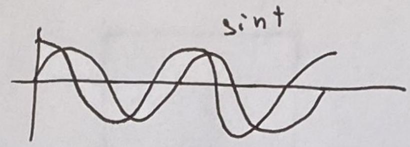
$=$

$3 + \frac{\sin 2t}{2} - (\sin t + \cos t)$

~~cos t +~~

$\sin t - \cos t + \cos 2t = 0$

~~cos t + sin t + 2 sin 2t~~



$\cancel{\sqrt{1-x^2}}$

$x - \sqrt{1-x^2} + 1 - 2x^2 = 0$

$(x + 1 - 2x^2)^2 = 1 - x^2$

$x^2 + \cancel{1} + 4x^4 - 2x - 4x^2 -$

$- 4x^3 = \cancel{1} - x^2$

$4x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x = 0$

$2x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

~~2 −2 +1 −1~~

~~2 2 −1 −1~~

$1 = cx$

$x = \frac{1}{c}$

$x(t) = \frac{1}{c} \qquad 3 + \sin t\cos t - \sin t - \cos t = \frac{1}{c}$

$3 + \frac{\sin 2t}{2} - \sin t - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{c}$

$6 + \sin 2t - 2\left(\sin t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \frac{2}{c}$

$\sin a + \sin\beta = \frac{1}{2}\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$(\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b) =$

$= \cancel{\sin a\cos b}$

$\frac{1}{2}\sin^a$

$\frac{\sin 2a\cos^2 b}{2} + \frac{\sin^2 a\sin 2b}{2} + \cos^2 a \cdot \frac{\sin 2b}{2} + \frac{\sin 2a}{2}\sin^2 b$

$\sin a + \sin\beta = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 2b}{2}$

$6x^2 - 4x - 1$

$D = 16 + 24 = 40$

$6 + \sin 2t - 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{c}$

$6 + \sin 2t - 2\sqrt{2}\left(\cos t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{c}$

$6 + \sin 2t - 2(\cos t + \sin t) = \frac{2}{c}$

~~6 + sin~~ $6 + x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} - x = \frac{1}{c}$

$\sqrt{1-x^2}(x - 1) = \frac{1}{c} + x - 6$

$(1-x^2)(x^2 + 1 - 2x) = \frac{1}{c^2} + x^2 + 36 + \frac{2x}{c} - \frac{12}{c} - 12x$

$\sin t(\cos t - 1) = \sin t(\cos t - \cos$

$t = 15с,\ \vartheta = 100 км/ч$ (Черновик) 2/4

$\vartheta = at \Rightarrow a = \frac{\vartheta}{t} = \frac{100 \cdot 10^3}{60 \cdot 60 \cdot 15} = \frac{1000}{6 \cdot 6 \cdot 15} = \frac{200}{6 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{\cancel{100}}{3 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{\cancel{50}}{3^3} = \frac{\cancel{50}}{27}$ 25

$S = \frac{\vartheta^2}{2a} = 100$

1250
625

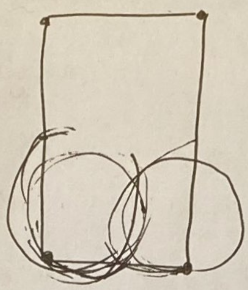
$\frac{at^2}{2} = \frac{\cancel{50} \cdot 15^2}{27 \cdot 2} = \frac{\cancel{50} \cdot 15 \cdot 15}{3^3 \cdot 2} = \frac{\cancel{25} \cdot 5^2}{3 \cdot 2} = \frac{\cancel{25} \cdot 25}{6} = \frac{625}{6} \approx 104$ м

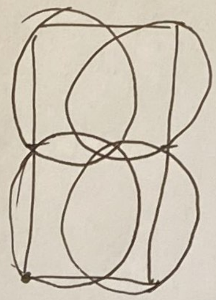
$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$

$\frac{25 \cdot 15^2}{27 \cdot 2} = \frac{5^4 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2} = \frac{5^4}{3 \cdot 2} = \frac{5^4}{6} =$

$a = 90м,\ b = 60м$

$h: 0,1м;$

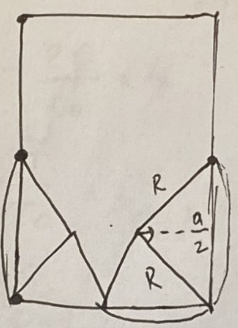




$> \frac{a}{4}$ $\quad \frac{90}{4} = \frac{45}{4} = 11,25$

$> 11,25$

$11,3$



11,3 / 11,25 $\quad \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$0,05 \cdot 22,55$

$\frac{22,55}{20} = \frac{2,255}{2} = 1,1275$

$\frac{a^2}{4} = 2R^2(1 - \cos\alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\frac{a}{4}}{R}\right)^4 =$

$= 1 - 2 \cdot \frac{a^2}{16R^2} = 1 - \frac{a^2}{8R^2}$

$\frac{a^2}{4} = 2R^2 \cdot \frac{a^2}{8R^2} \Rightarrow$

32 видео
52 Тетрис
$\vartheta_{ср1} = 80 км/ч$
$\vartheta_{ср2} = 60 км/ч$

$V \quad \vartheta t$

$V_0 = 32 \cdot \vartheta_в \Rightarrow \vartheta_в = \frac{V_0}{32}$

$V_0 = 52 \cdot \vartheta_т \Rightarrow \vartheta_т = \frac{V_0}{52}$

$\frac{V_0}{32} \cdot \frac{t}{2} + \frac{V_0}{52} \cdot \frac{t}{2} = V_0$

$\frac{t}{6} + \frac{t}{10} = 1$

~~10t+6t~~ $\quad \frac{3t + 5t}{30} = 1$

$8t - 30 = 0$

$8t = 30$

$t = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ ч $= 3,75$ ч

$\frac{S}{2 \cdot t_1} = \vartheta_{ср1} \quad t_1 = \frac{S}{2\vartheta_{ср1}}$

$\frac{S}{2(t - t_1)} = \vartheta_{ср2}$

$S = 2t\vartheta_{ср2} - \frac{S\vartheta_{ср2}}{\vartheta_{ср1}}$

$S = \frac{2t\vartheta_{ср2}}{1 + \frac{\vartheta_{ср2}}{\vartheta_{ср1}}} =$

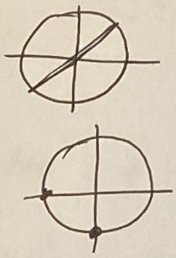
$= \frac{2 \cdot 3,75 \cdot 60}{1 + \frac{60}{80}} = \frac{7,5 \cdot 60}{\frac{7}{4}} =$

$= \frac{30 \cdot 60}{7} = \frac{1800}{7} =$

$\begin{array}{r|l} 1800 & 7 \\ \hline -14 & 257,1 \\ 40 & \\ -35 & \\ 50 & \\ -49 & \\ 10 & \end{array}$

(Черновик) $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ 3/4

$-1+1$



1. Изохора ($V=const$): $3p_0 \to p_0$
2. Изобара ($p=const$): $\rho_0 \to 3\rho_0$
3. В исх.: $p/p_0(\rho/\rho_0)$: $(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$

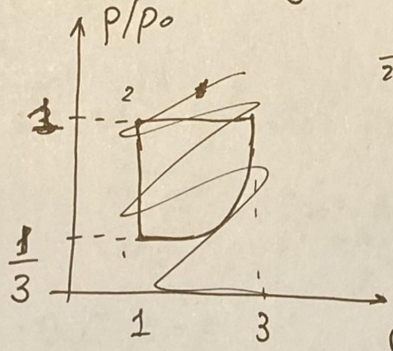
$\eta = \frac{\eta_{карно}}{8}$

$pV = \nu RT$

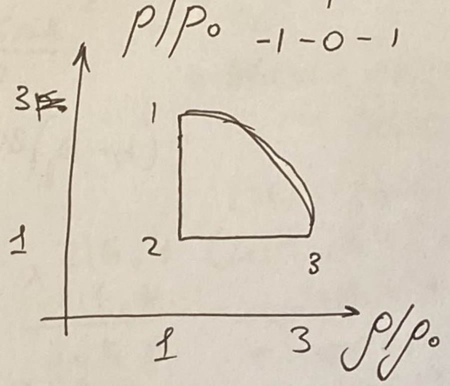
$p = \frac{\rho RT}{M}$

$pV = \frac{mRT}{M}$

$pV = \frac{\rho RT}{M}V$



$\frac{\pi}{2}+\pi = \frac{3\pi}{2}$



$pV = \nu RT$

$p = \frac{\rho RT}{M}$

12: T↓
23: T↓
31: T↑

$\times \begin{array}{r} 3,5 \\ 3,5 \end{array}$
175
105
12,25

$\left(\frac{p}{p_0}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)^2=4$ $10,5+1,75=$
$=12,25$ $\frac{p}{p_0}=\frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$ $p_0 = \frac{\rho_0 RT_0}{M}$

$\frac{p^2}{p_0^2}+1-\frac{2p}{p_0}+\frac{\rho^2}{\rho_0^2}+1-\frac{2\rho}{\rho_0}=4$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\cdot\frac{T^2}{T_0^2}+1-\frac{2\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2+1-\frac{2\rho}{\rho_0}=4$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{T_0}{T_0}\right)^2+1\right)-\frac{2\rho}{\rho_0}\left(\frac{T}{T_0}+1\right)-2=0$ $\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}$

$\frac{p_0}{p_0}=\frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$ $\left(\frac{p}{p_0}\right)'_{\rho/\rho_0}=\frac{T}{T_0}$ Т.1 и Т.3 $\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}$

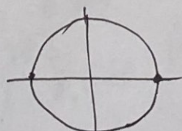
В т.1: $\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}=\frac{T}{T_0}=3$ $T=3T_0$

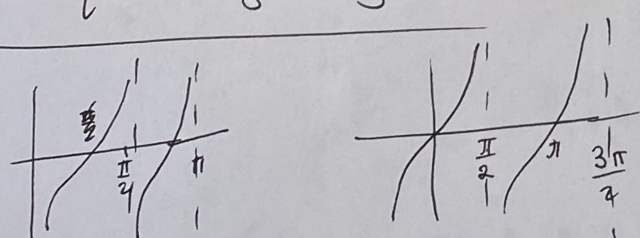
В т.3: $\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}=3\frac{T}{T_0}=1$ $T=\frac{1}{3}T_0$

$\eta = 1-\frac{T_x}{T_н}=1-\frac{\frac{1}{3}T_0}{3T_0}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ ~~108,1~~

$\eta=\frac{\eta_{карно}}{8}=\frac{1}{9}$

$\times \begin{array}{r} 108,4 \\ 108,4 \end{array}$
43336
86672
1084
11750,56



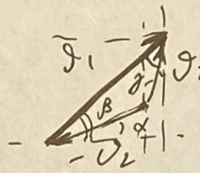


$3-1$ $\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=\frac12$ $3+\frac12-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}=$
$=3+\frac{1-2\sqrt2}{2}$ $3,5-1,4$
$3,5-\sqrt2$ 2,1

(Черновик) 4/4

$\vartheta_1, \beta, \vartheta_2, \alpha$

$\vartheta_1 \sin\beta - \vartheta_2 \sin\alpha = \Delta\vartheta$



$/\vartheta_1'$

$2 \cdot 2 \cdot 10^4 = 40000$

$\Delta\vartheta^2$

$108{,}4 \times 108{,}4 = 33\,6$

15×15: 75, 15, 225

$22{,}5 \times 22{,}5$: 1325, 450, 450, 508,25

$\frac{m\vartheta_1'^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2}$

$60^2 + 90^2 = 3600 + 8100 = 11700$

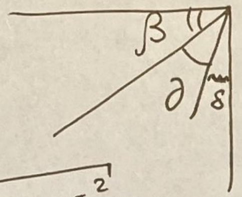
$\vartheta_1'^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2\cos(\beta - \alpha)$

$\frac{\sin\gamma}{\vartheta_2} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\vartheta_1'}$

$216{,}4 \cdot 216{,}4$

$(200+16{,}4)^2 = 200^2 + 16{,}4^2 + 400 \cdot 16{,}4 = 40000 + 6560 + 267{,}94 = 46828{,}96$

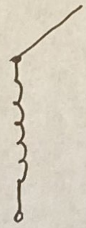
$216{,}4 \times 216{,}4$: 8656, 12984, 2164, 4328, 46828,96



$\delta = 90° - \beta - \gamma$

$\sqrt{15^2 + 22{,}5^2} = \sqrt{225 + 508{,}25} = \sqrt{723{,}25}$

108×108: 864, 108, 11664

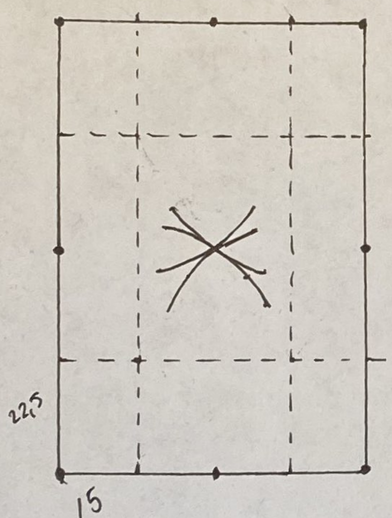


1170000

~~11700~~

$16{,}4 \times 16{,}4$: 656, 984, 164, 268,96

$81 + 36 = 117$



$10{,}82 \times 5$ / 2

$10{,}82 : 2 = 5{,}41$

$5{,}41$ $54{,}1 / 2$

$90^2 + 60^2 = (9^2 + 6^2) \cdot 100 = (81 + 36) \cdot 100 = 1$

$8100 + 3600 = $

$=$

$10{,}82 \times 5 = 54{,}10$

$10{,}81 \times 10{,}81$: 1081, 8648, 1081, 116,8561

$10{,}85^2$: $10{,}85 \times 10{,}85$: 5425, 8680, 1085, 117,7225

$\sqrt{117} \cdot 10$

225 15

11^2 121

10^2 100

27,1

$105 + 5{,}25 = 110{,}25$

$10{,}5 \times 10{,}5$

$10{,}6 \times 10{,}6$: 636, 106, 112,36

$10{,}5 \times 10{,}5$: 525, 105, 110,25

$10{,}7 \times 10{,}7$: 749, 107, 114,49

$10{,}8 \times 10{,}8$: 864, 108, 116,64

$10{,}9 \times 10{,}9$: 981, 109, 118,81

$10{,}82 \times 10{,}82$: 2164, 8656, 1082, 117,0724

54,1 / 2 = 27,05

10,82 · 5

108,2 / 2 = 54,1

$108{,}1 \times 108{,}1$: 1081, 8648, 1081, 11685,61

$108{,}2 \times 108{,}2$: 2164, 8656, 1082, 11707,24

$54{,}1 \cdot 2 \cdot 2 = 108{,}2 \cdot 2 = 216{,}4$

54,1

28,1

Задача №1.

$\tau = 15с$

$\vartheta_к = 100км/ч$

$S - ?$

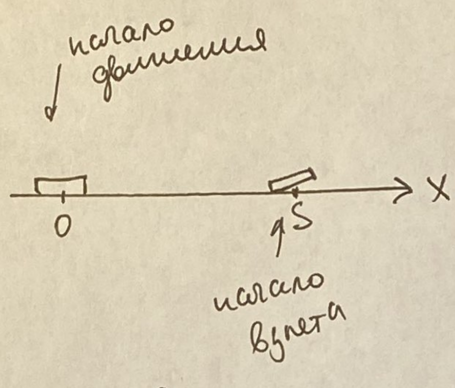
$\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta_0} + \vec{a}t$

$OX: \vartheta = at$

$\vartheta_к = \vartheta(\tau) = a\tau \Rightarrow a = \frac{\vartheta_к}{\tau}$

$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{\vartheta_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

$OX: x = \frac{at^2}{2}$



$S = x(\tau) = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{\vartheta_к}{\tau}\cdot\frac{\tau^2}{2} = \frac{\vartheta_к\tau}{2} = \frac{100\cdot10^3 м \cdot 15с}{60^2 с\cdot 2} = \frac{1000\cdot 15}{6^2\cdot 2} м =$

$= \frac{125\cdot 5}{3} м = \frac{625}{3} м \approx 208 м$

Ответ: $S = 208$ м.

Задача №3.

$\tau_в = 3ч$

$\tau_т = 5ч$

$t_в = t_т = \frac{t_0}{2}$

$\vartheta_{ср1} = 80км/ч$

$\vartheta_{ср2} = 60км/ч$

$S_1 = S_2 = \frac{S_0}{2}$

$S_0 - ?$

Пусть объем ~~батарейки~~ аккумулятора телефона равен V_0, $\vartheta_в$ - скорость его разрядки при просмотре видео, $\vartheta_т$ - скорость его разрядки при игре в тетрис.

Тогда:

$t_в, t_т$ - время, которое он смотрел видео и играл в тетрис соответственно

$V_0 = \vartheta_в\cdot\tau_в \Rightarrow \vartheta_в = \frac{V_0}{\tau_в}$

$V_0 = \vartheta_т\cdot\tau_т \Rightarrow \vartheta_т = \frac{V_0}{\tau_т}$

$V_0 = \vartheta_в\cdot t_в + \vartheta_т\cdot t_т$

$V_0 = \frac{V_0}{\tau_в}\cdot t_в + \frac{V_0}{\tau_т}\cdot t_т$

$1 = \frac{t_в}{\tau_в} + \frac{t_т}{\tau_т}$

$t_в = t_т = \frac{t_0}{2}$

$1 = \frac{t_0}{2\tau_в} + \frac{t_0}{2\tau_т} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{\frac{1}{2\tau_в} + \frac{1}{2\tau_т}} = \frac{2\tau_в\cdot\tau_т}{\tau_т + \tau_в} =$

$= \frac{2\cdot 3ч\cdot 5ч}{3ч + 5ч} = \frac{30}{8}ч = \frac{15}{4}ч = 3,75ч$ (время всего пути)

$\begin{cases} \vartheta_{ср1} = \frac{S_1}{t_1} \\ \vartheta_{ср2} = \frac{S_2}{t_2} \end{cases}$

t_1 - время, за к-ое пройдена первая половина пути

t_2 - время, за к-ое пройдена вторая половина пути

$S_1 = S_2 = \frac{S_0}{2}$; $t_1 + t_2 = t_0 \Rightarrow t_2 = t_1 - t_0$

Чистовик

$$\begin{cases}\vartheta_{ср1} = \dfrac{S_0}{2t_1} \\ \vartheta_{ср2} = \dfrac{S_0}{2(t_0 - t_1)}\end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{S_0}{2\vartheta_{ср1}} \\ 2\vartheta_{ср2}t_0 - 2\vartheta_{ср2}t_1 = S_0\end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{S_0}{2\vartheta_{ср1}} \\ 2\vartheta_{ср2}t_0 - S_0\dfrac{\vartheta_{ср2}}{\vartheta_{ср1}} = S_0\end{cases}$$

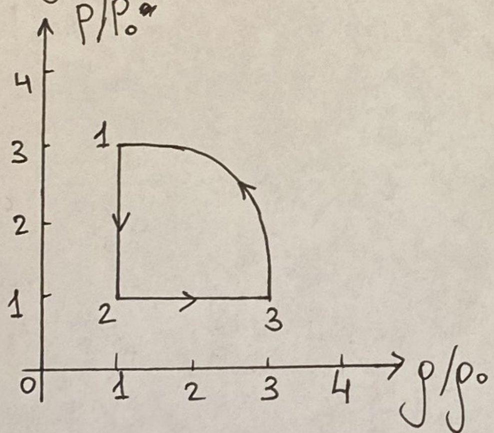
$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{S_0}{2\vartheta_{ср1}} \\ S_0\left(1 + \dfrac{\vartheta_{ср2}}{\vartheta_{ср1}}\right) = 2\vartheta_{ср2}t_0 \end{cases} \Rightarrow S_0 = \frac{2\vartheta_{ср2}t_0}{1 + \dfrac{\vartheta_{ср2}}{\vartheta_{ср1}}} = \frac{2\vartheta_{ср1}\vartheta_{ср2}t_0}{\vartheta_{ср1} + \vartheta_{ср2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 80км/ч \cdot 60км/ч \cdot 3{,}75ч}{80км/ч + 60км/ч} = \frac{2\cdot 8\cdot 6\cdot 375}{140}км = \frac{2\cdot 2\cdot 6\cdot 375км}{35} = \frac{4\cdot 6\cdot 75}{7}км =$$

$$= \frac{300\cdot 6}{7}км = \frac{1800}{7}км \approx 257км \text{ (весь путь)}$$

Ответ: $S_0 = 257км$

Задача №4.



$$PV = \nu RT$$
$$PV = \frac{m}{M}RT$$
$$P = \frac{mRT}{VM} = \frac{\rho RT}{M}$$

12: $V = const$; $3P_0 \to P_0$

~~$PV = \nu RT$~~

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \\ m &= const \\ V &= const \end{aligned}\right| \Rightarrow \rho = const$$

~~23: $P = const$; $\rho_0 \to 3\rho_0$~~

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\rho RT_1}{M} = 3P_0 \\ P_2 &= \frac{\rho RT_2}{M} = P_0 \end{aligned}\right| \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{3},$$ т.е. температура уменьшается в процессе 12.

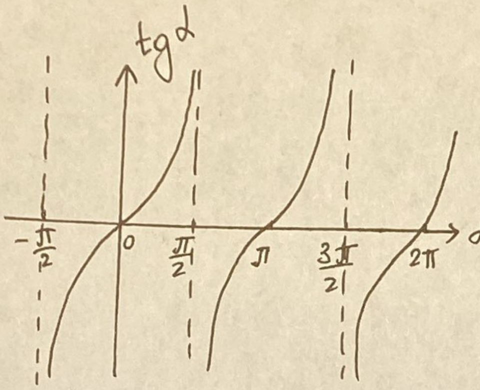
23: $P = const$; $\rho_0 \to 3\rho_0$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\rho_2 RT_2}{M} = \frac{\rho_0 RT_2}{M} \\ P &= \frac{\rho_3 RT_3}{M} = \frac{3\rho_0 RT_3}{M} \end{aligned}\right| \Rightarrow T_3 = \frac{T_2}{3},$$ т.е. температура уменьшается в процессе 23.

31: $\left(\frac{P}{P_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 = 2^2$

α - угол наклона касательной к графику $P/P_0(\rho/\rho_0)$.

$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$; $\underbrace{\left(\frac{P}{P_0}\right)'_{\frac{\rho}{\rho_0}}}_{тангенс} = \frac{T}{T_0} = tg\alpha \Rightarrow$ В процессе 31 температура минимальна, где тангенс угла наклона касательной к графику $\frac{P}{P_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$ минимален. Температура максимальна, где тангенс этого угла максимален.



В таком случае получаем, что в начале процесса 31 температура минимальна ($\cancel{tg}\ \alpha \to \frac{\pi}{2}+$), ~~tg α → ...~~, а в конце максимальна ($\alpha \to \pi-$)

$T_{min} = T_3$; $T_{max} = T_1$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{T}{T_0}$$

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{\rho_3}{\rho_0}\cdot\frac{T_3}{T_0} \Rightarrow T_3 = \frac{P_3}{P_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_3}\cdot T_0 = 1\cdot\frac{1}{3}\cdot T_0 = \frac{T_0}{3} = T_{min}$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\cdot\frac{T_1}{T_0} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1}{P_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_1}\cdot T_0 = 3\cdot 1\cdot T_0 = 3T_0 = T_{max}$$

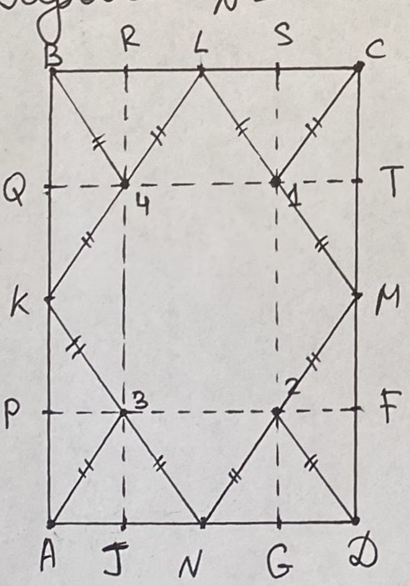
Максимально возможный КПД при тех же значениях мин. и макс. температур соотв. КПД цикла Карно:

$$\eta_{max} = \left(1 - \frac{T_x}{T_н}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot 100\% = \frac{8}{9}\cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{\eta_{max}}{8} = \frac{1}{9}\cdot 100\% \approx 11{,}11\%$$

Ответ: $\eta = 11{,}11\%$

Задача №2.



ABCD - поле, AB = CD = 90 м; BC = DA = 60 м

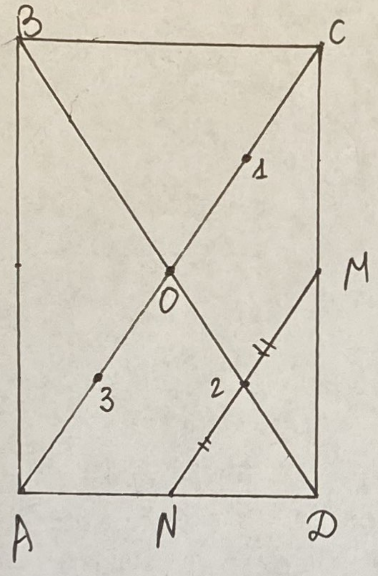
K, L, M, N - середины сторон.

Чтобы высота прожекторов была минимальна, должна быть минимальна площадь поля, освещенная более, чем одним прожектором.

В таком случае окружности ~~на поле~~ территории на поле от освещенной первых двух прожекторов должны пересекаться в точке M, а от двух других - в точке K (т.к. MD > ND и KA > AN).

Чтобы высота была наименьшей, радиусы ~~окруж.~~ освещенных кругов должны быть наименьшими. Значит, окружности также проходят через углы поля A, B, C, D.

Но слишком маленький радиус окружности тоже не подойдет. Иначе, например, у точки N будет неосвещенная территория. Значит, 2 и 3 окружности должны пересекаться в точке N (крайний случай, для наименьшей высоты). Аналогично 4 и 1 окружности — в точке L.
В таком случае центры окружностей лежат на пересечениях прямых SG, FP, JR, QT, где R, S, T, F, G, J, P, Q — середины BL, LC, CM, MD, DN, NA, AK, KB соответственно.



Это так, потому что, например, точка 2 равноудалена от N и D. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку ND, т.е. на SG. Также точка 2 равноудалена от M и D. Значит, она на серединном перпендикуляре к отрезку MD, т.е. на PF. В таком случае она на пересечении PF и SG. Для точек 1, 3, 4 — аналогично.

$\triangle N2G = \triangle 2MF$ по 2 сторонам и углу между ними ($\angle NG2 = \angle 2FM = 90^\circ$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle 2NG = \angle M2F$, $NG \parallel 2F$ $\Rightarrow N2 \parallel 2M \Rightarrow$ (т.к. у них общая точка)
$\Rightarrow N, 2, M$ лежат на одной прямой.

При этом $2N = 2M = R \Rightarrow R = \frac{NM}{2}$

M — середина CD, N — середина AD $\Rightarrow NM$ — средняя линия в $\triangle ACD \Rightarrow$

$$\Rightarrow NM = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + CD^2}}{2}$$

$$R = \frac{NM}{2} = \frac{\sqrt{AD^2+CD^2}}{4} = \frac{\sqrt{(90м)^2+(60м)^2}}{4} = \frac{\sqrt{81+36}\cdot 10м}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{117}\cdot 5м}{2} \approx 10{,}82 \cdot \frac{5}{2} м = 27{,}05м$$

Но нам необходимо, чтобы центр поля тоже освещался, так что $O1 \le R$, $O3 \le R$

~~Крайний случай: $O1 = O3 = R$~~

В таком случае: $AC \le A3 + 3O + O1 + 1C \le 4R$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(90м)^2 + (60м)^2} = 10\sqrt{117}$ м

$AC^2 \le 16R^2$

$11700 м^2 \le 16R^2 = (4R)^2$

Если $R = 27{,}0$ м, то $4R = 108{,}0$ м

$(4R)^2 = (108 м)^2 = 11664 м^2 < 11700 м^2$

Т.е. $R > 27{,}0$ м.

Если $R = 27{,}1$ м, то $4R = 108{,}4$ м

$(4R)^2 = 11750{,}56 м^2 > 11700 м^2$

Значит, $R = 27{,}1$ м и есть минимальный радиус освещаемой камерой прожектором окружности. По условию высота прожектора равна радиусу этой окружности, т.е. $H_{min} = R = 27{,}1$ м

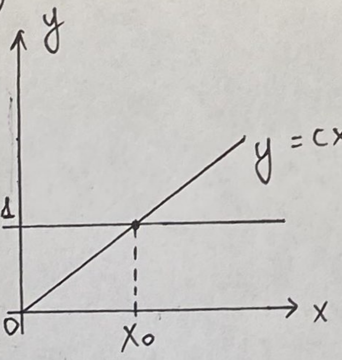
Ответ: $H_{min} = 27{,}1$ м

Задача №5.

$x(t) = 3 + \sin t\cos t - \sin t - \cos t$; $y(t) = 1$

$y = cx = g(x)$ $\qquad g(x_0) = 1$

$cx_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{c}$



Существует хотя бы один момент времени, когда частица освещена, если уравнение

$3 + \sin t\cos t - \sin t - \cos t = x_0$ имеет хотя бы одно решение

$f(t) = 3 + \sin t\cos t - \sin t - \cos t$

$(f(t))' = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t =$

$= \cos 2t - \cos t + \sin t$

$(f(t))' = 0$: $\cos 2t - \cos t + \sin t = 0$

1) $t = 0$: $1 - 1 + 0 = 0$ верно, $t = 0$ корень

~~2) $t = \frac{\pi}{4}$: $0 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ верно, $t = \frac{\pi}{4}$ корень~~

2) $t=\frac{\pi}{2}$: $-1-0+1=0$ верно, $t=\frac{\pi}{2}$ корень

3) $t=\frac{\pi}{4}$: $0-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ верно, $t=\frac{\pi}{4}$ корень

4) $t=\frac{5\pi}{4}$: $0+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=2\pi n, n\in Z \\ t=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z \\ t=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \end{array}\right.$$

$\left(\begin{array}{l} t=\pi \text{ не подх.} \\ t=\frac{\pi}{2}+\pi \text{ не подх.} \end{array}\right)$

~~Производная равна 0, когда функция достигает~~

$\cancel{f(2\pi)}$ $f(0)=3-1=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cancel{3+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=3,5-\sqrt{2}}\ 3-1=2$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=3,5-\sqrt{2}$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=3+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=3,5+\sqrt{2}$

Изгибы функции

Сравним 2 и $3,5-\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ccc} 2 & < & 3,5-\sqrt{2} \\ & \Updownarrow & \\ \sqrt{2} & < & 1,5 \\ & \Updownarrow & \\ 2\sqrt{2} & < & 3 \\ & \Updownarrow & \\ 4\cdot 2 & < & 9 \\ & \Updownarrow & \\ 8 & < & 9 \end{array}$$

Таким образом $f(t)\in[2; 3,5+\sqrt{2}]$

$x_0\in[2; 3,5+\sqrt{2}] \Leftrightarrow$ корни есть

$\frac{1}{c}\in[2; 3,5+\sqrt{2}]$

1) $\frac{1}{c}\geq 2$

$\frac{1-2c}{c}\geq 0 \underset{c>0}{\Rightarrow} 1-2c\geq 0$

$1\geq 2c$

$c\leq\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{c}\leq 3,5+\sqrt{2}$

$\frac{1-3,5c-\sqrt{2}c}{c}\leq 0 \underset{c>0}{\Rightarrow}$

$\underset{c>0}{\Rightarrow} 1-3,5c-\sqrt{2}c\leq 0$

$c(3,5+\sqrt{2})\geq 1$

$c\geq\frac{1}{3,5+\sqrt{2}}$

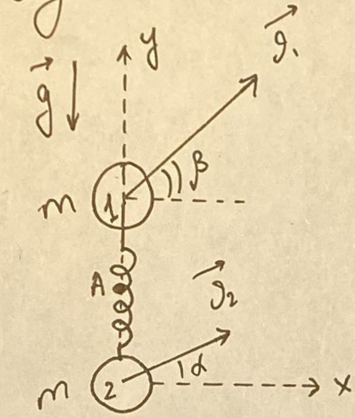
$(3,5+\sqrt{2} > 2)$

$$\begin{cases} c\leq\frac{1}{2} \\ c\geq\frac{1}{3,5+\sqrt{2}}=\frac{3,5-\sqrt{2}}{12,25-2}=\frac{3,5-\sqrt{2}}{10,25} \end{cases}$$

$c\in\left[\frac{3,5-\sqrt{2}}{10,25}; \frac{1}{2}\right]$

Ответ: при $c\in\left[\frac{3,5-\sqrt{2}}{10,25}; \frac{1}{2}\right]$

Задача №6.



Если $\vartheta_1 \sin\beta > \vartheta_2 \sin\beta$, то пружина вначале будет растягиваться.

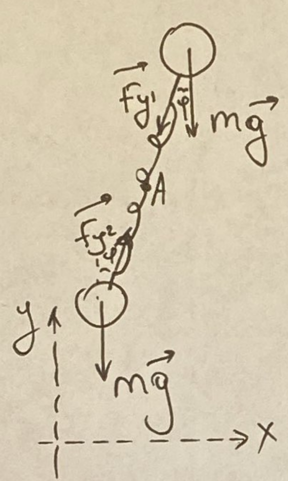
В таком случае будет действовать на шары сила, направленная к середине пружины.

$\cancel{\vartheta_c^x = \vartheta_1\cos\alpha - \vartheta_2\cos\beta}$

$\cancel{\vartheta_c^x = \frac{|\vartheta_1\cos\beta - \vartheta_2\cos\alpha|}{2}}$ ~~проекция скорости центра масс на OX.~~

~~(если $\vartheta_1\cos\beta > \vartheta_2\cos\alpha$)~~

Центр масс находится в точке A.



$m\vec{a}_1 = \vec{F}_{y1} + m\vec{g}$

$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{y2} + m\vec{g}$

$|\vec{F}_{y1}| = |\vec{F}_{y2}| = F_y$

$\cancel{OX: ma =}$

$OX: ma_{01}^x = 0, \; ma_{02}^x = 0$

$OY: ma_{01}^y = mg, \; ma_{02}^y = 0$ | в нач. момент

$OX: ma_1^x = -F_y\sin\varphi$

$ma_2^x = F_y\sin\varphi$ | через нек. время

$OY: ma_1^y = mg + F_y\cos\varphi$

$ma_2^y = mg - F_y\cos\varphi$

$\vec{u}_1(t) = \vec{\vartheta}_1 + \vec{a}_1 t$

$\vec{u}_2(t) = \vec{\vartheta}_2 + \vec{a}_2 t$

Без силы упругости шары двигались бы по параболам.

$W_0 = \frac{m\vartheta_1^2}{2} + \frac{m\vartheta_2^2}{2}$

$W_1 = \frac{m\vartheta_1'^2}{2} + \frac{m\vartheta_2'^2}{2} + 2mgh + \frac{k\Delta l^2}{2}$ ← в наивысшей точке.

растяжение максимально, ϑ_1' и ϑ_2' вдоль OX, верь ~~направление~~ составляющая скорости вдоль OY меняет знак, т.е. равна

ЗСЭ для системы: $\cancel{\frac{m\vartheta_1^2}{2}} + \cancel{\frac{m\vartheta_2^2}{2}}$

$W_0 = W_1$

$\frac{m\vartheta_1^2}{2} + \frac{m\vartheta_2^2}{2} = \frac{m\vartheta_1'^2}{2} + \frac{m\vartheta_2'^2}{2} + 2mgh + \frac{k\Delta l^2}{2}$

Для 1 шара: $\frac{m\vartheta_1^2}{2} = mg(h + \Delta l) + \frac{m\vartheta_1'^2}{2}$

Для 2 шара: $\frac{m\vartheta_2^2}{2} = mg(h + \Delta l) + \frac{m\vartheta_2'^2}{2}$

Если пружина не изменяет своей ориентации в пространстве, т.е. не вращается вокруг оси, перпендикулярной ей и проходящей через её центр.

В таком случае $\vartheta_1 \cos\beta = \vartheta_2 \cos\alpha$ и

$\vartheta_1' = \vartheta_1 \cos\beta$, $\vartheta_2' = \vartheta_2 \cos\alpha$

Но если $\vartheta_1 \cos\beta \neq \vartheta_2 \cos\alpha$, то пружина вращается

$$\vartheta_{вр} = \cancel{\vartheta_1 \cos\beta - \vartheta_c^x} \Rightarrow \frac{|\vartheta_1 \cos\beta - \vartheta_2 \cos\alpha|}{2}$$

$$\vartheta_c^x = |\vartheta_1 \cos\beta - \vartheta_{вр}| = \frac{\vartheta_1 \cos\beta + \vartheta_2 \cos\alpha}{2}$$ скорость центра масс в проекции на Ox.

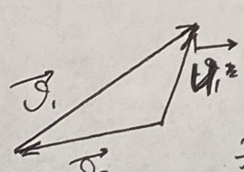
Центр масс в точке A, т.к. массы равны.
В СО ц.м. вращ. вокруг него. Чем-то напоминает маятник.
В таком случае как раз появляется угол φ и $F_{упр}$ действует под ним. Но ~~$\vartheta_{вращ}$~~ $\vartheta_{вр}$ и ϑ_c^x зависят от времени, т.е. они написаны для нач. моментов.

$$\frac{m(\vartheta_1 \sin\beta - \vartheta_2 \sin\alpha)^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}$$

Можно перейти в СО ~~II~~ шара №2: $\vec{\vartheta}_{абс} = \vec{\vartheta}_{отн} + \vec{\vartheta}_{пер}$

Но опять же скорости будут непостоянны.

$\vec{u}_1$ – скорость шара 1 в СО шара 2.



В таком случае вращ. вокруг шара 2.
Это похоже на мат. маятник, где вместо силы натяжения нити есть сила упругости $F_{упр}$.

Высота максимальна, когда максимально растяжение пружины впервые. ~~Это соответствует минимальным скоростям шаров.~~ Так же из ЗСЭ чем меньше при этом скорости шаров, тем больше опять же высота. Можно взять частные производные по ϑ_1', ϑ_2' и Δl и приравнять их к 0.