МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Давыдкова Мария Александровна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Давыдкова Мария Александровна

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
0 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	80 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик.

1. $t = 15c$ В момент старта скорость самолёта $v_0 = 0$
$v = 100 км/ч$ При равноускоренном движении длина
$v_0 = 0$ пути рассчитывается по формуле:
$l - ?$

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ где ускорение } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

за время t скорость изменилась на $v - v_0 = v - 0 = v \Rightarrow$

$$a = \frac{v}{t} \Rightarrow l = v_0 t + \frac{v}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{vt}{2} \Rightarrow$$

$$l = \frac{vt}{2}. \quad v = 100 км/ч = 100 \cdot \frac{3600}{1000} м/с = 360 м/с \Rightarrow$$

$$l = \frac{360 м/с \cdot 15с}{2} = 2700 м.$$

Ответ: 2700м.

3. $t_B = 3ч$ Пусть $2t$ - время движения электрички $\Rightarrow$
$t_T = 5ч$ Гаврила t времени играл в Тетрис и
$v_1 = 80 км/ч$ t времени смотрел мультики.
$v_2 = 60 км/ч$ Пусть x - полный заряд смартфона $\Rightarrow$
$l - ?$ скорость разрядки при игре в тетрис:

$v_T = \frac{x}{t_T}$, а при просмотре видео: $v_B = \frac{x}{t_B}$.

Т.к. за поездку смартфон разрядился полностью, $v_B t + v_T t = x \Rightarrow$

$$\frac{x}{t_T} \cdot t + \frac{x}{t_B} \cdot t = x \Rightarrow t\,\frac{t_B + t_T}{t_B \cdot t_T} = 1, \quad t = \frac{t_B \cdot t_T}{t_B + t_T}$$

Пусть v - средняя скорость движения на всём пути $\Rightarrow$
$v = \frac{l}{2t}$. $2t = t_1 + t_2$, где $t_1 = \frac{l}{2 \cdot v_1}$ и $t_2 = \frac{l}{2v_2}$ - время прохожд. первой и второй половины пути,

$$v = \frac{l}{\frac{l}{2 \cdot v_1} + \frac{l}{2 \cdot v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$l = v \cdot 2t \Rightarrow l = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \cdot 2 \cdot \frac{t_B \cdot t_T}{t_B + t_T} \Rightarrow l = \frac{4 \cdot 60 км/ч \cdot 80 км/ч \cdot 3ч \cdot 5ч}{140 км/ч \cdot 8ч} = \frac{1800}{7} км$$

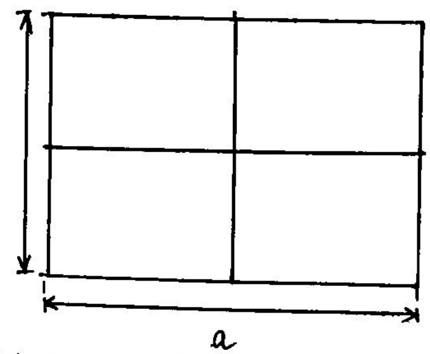
$$\begin{array}{r|l} -1800 & 7 \\ 14 & 257 \\ -40 & \\ 35 & \\ 50-49=1 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1800}{7} км = 257\frac{1}{7} км \approx 257 км$, т.к. $0 < \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$

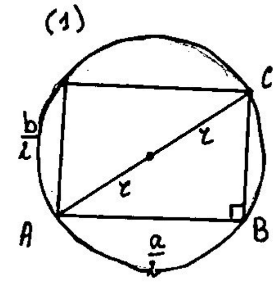
Ответ: 257км.

Чистовик.

2. $a = 90$ м
$b = 60$ м
h - ?



$\Rightarrow$



Т.к. необходимо найти минимальную высоту h, нужно, чтобы каждый прожектор освещал круг с таким минимальным радиусом, чтобы четыре таких круга осветили всю площадь поля $\Rightarrow$ пусть каждый прожектор полностью освещает одну из 4 равных прямоугольных секций (1) $\Rightarrow$

$2r \geq AC$. По теореме Пифагора,

$AC^2 = AB^2 + CB^2 \Rightarrow AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$ т.к. $h = r$,

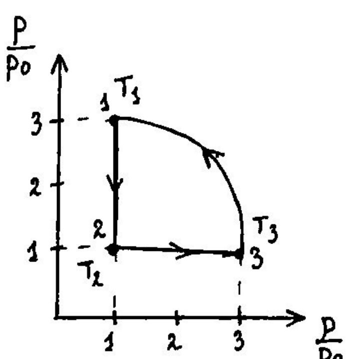
$2h = 2r \geq \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow h = r \geq \frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

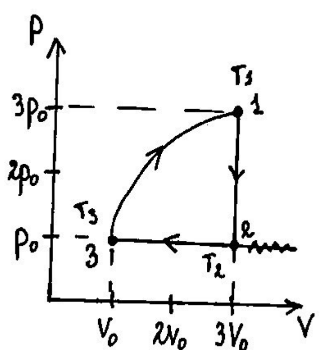
$\frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{4}\sqrt{60^2+90^2}$ м $= \frac{30}{4}\sqrt{2^2+3^2}$ м $= \frac{15\sqrt{13}}{2}$ м $\Rightarrow h \geq \frac{15\sqrt{13}}{2}$ м.

$\sqrt{12,96} = 3,6 < \sqrt{13} < 3,61 = \sqrt{13,3121} \Rightarrow \frac{15\cdot 3,6}{2} = 27 < \frac{15\sqrt{13}}{2} < 27,075 = \frac{15\cdot 3,61}{2}$,

т.к. h кратна 0,1 м, $h = 27,1$ м. Ответ: 27,1 м.

4.





12: $V = const$, $3p_0 \to p_0$
23: $p = const$, $\rho_0 \to 3\rho_0$
Замкнут: 1231.
$\rho = \frac{m}{V}$, $m = const \Rightarrow$
$\rho \sim \frac{1}{V} \Rightarrow V = const$, $p = const$
(т.к. пусть $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$) $\rho_0 \to 3\rho_0$, $3V_0 \to V_0$

по закону Менделеева-Клапейрона, $pV = \nu RT \Rightarrow$ 12: $V = c$, $p\downarrow \Rightarrow T\downarrow$
23: $p = c$, $V\downarrow \Rightarrow T\downarrow$
23: $p\uparrow$, $V\uparrow \Rightarrow T\uparrow \Rightarrow$

T_1 - максимальная температура,
T_3 - минимальная.

Чистовик.

При тех же знач. макс. и мин. температур, максимальный КПД ($\eta_м$) достигается при цикле Карно =>

$$\eta_м = \frac{T_{макс} - T_{мин}}{T_{макс}} \Rightarrow \eta_м = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1}.$$

по закону Менделеева - Клапейрона,

$1: 3p_0 \cdot 3V_0 = \nu R T_1$, $3: p_0 V_0 = \nu R T_3$ =>

$$\frac{\nu R \cdot T_3}{\nu R \cdot T_1} = \frac{p_0 V_0}{3p_0 \cdot 3V_0}, \quad \frac{T_3}{T_1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \eta_м = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$\eta = \frac{\eta_м}{8} \Rightarrow \eta = \frac{1}{9}$. Ответ: $\frac{1}{9}$.

5. $\begin{cases} x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t \\ y(t) = 1 \\ y = cx \end{cases}$ График движения частицы есть прямая или отрезок прямой, $\parallel$ оси абсцисс и проходящей через знач. $(0;1)$

c - ?

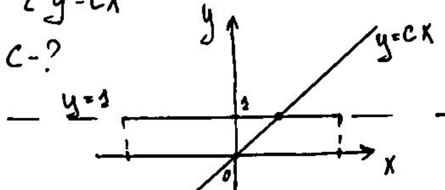


График траектории луча света - прямая через $(0;0)$ => графики имеют либо 1 точку пересеч., либо их нет.

$y = cx$, в точке пересеч. $y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{c}$ =>

$$\frac{1}{c} = 3 + \sin t \cos t - (\sin t + \cos t)$$

Пусть $\sin t + \cos t = a \Rightarrow a^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t = 1 + 2\sin t \cos t$ =>

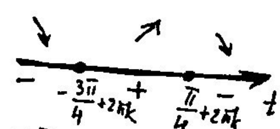
$$\sin t \cos t = \frac{a^2 - 1}{2} \Rightarrow$$

$\underline{\frac{1}{c} = 3 + \frac{a^2-1}{2} - a}$. Рассмотрим, какие знач. может принимать a:

$a = \sin t + \cos t \Rightarrow a' = \cos t - \sin t$,

в точках минимума и максимума a,

$a' = 0 \Rightarrow \cos t = \sin t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$



=>

$a(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ - мин.

$a(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - максимум => $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

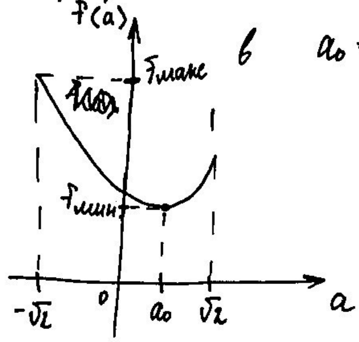
Чистовик.

Рассмотрим $\frac{1}{c} = 3 + \frac{a^2-1}{2} - a \Rightarrow \frac{2}{c} = 6 + a^2 - 1 - 2a = a^2 - 2a + 5$

Пусть $f(a) = a^2 - 2a + 5$, $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow$

график $f(a)$ – парабола, ветви $\uparrow$, вершина

в $a_0 = \frac{2}{2} = 1$



$\Rightarrow \frac{2}{c} \in [f_{мин}; f_{макс}]$

$f_{мин} = f(a_0) = f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

$f_{макс} = f(-\sqrt{2}) > f(\sqrt{2})$, т.к.

$|-\sqrt{2} - a_0| > |\sqrt{2} - a_0| \Rightarrow$

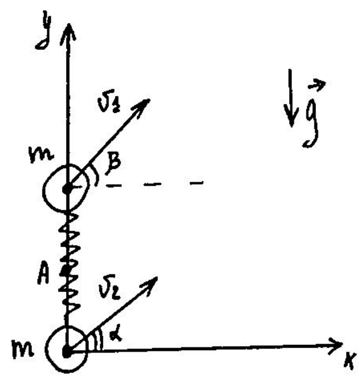
$f_{макс} = 2 + 2\sqrt{2} + 5 \Rightarrow$

$4 \le \frac{2}{c} \le 7 + 2\sqrt{2}$

$2 \le \frac{1}{c} \le \frac{7}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ge c \ge \frac{2}{7 + 2\sqrt{2}}$

Ответ: $\left[\frac{2}{7+2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right]$.

6. h - ?



т.к. $m_1 = m_2 = m$, пружина однородная,

A – центр масс системы $\Rightarrow$ в пр-и на ось y,

$v_{Ay} = v_{цм_y} = \frac{m v_{1y} + m v_{2y}}{m + m} = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \Rightarrow$

$v_{Ay} = \frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}$

(т.к. $v_{ц.м.} = \frac{\sum v_i m_i}{\sum m_i}$)

$\vec{g}$ – ускорение ц.м.

v_{Ay} – начальная скорость, $\vec{v_{Ay}} \uparrow\downarrow \vec{g}$

В верхней точке траектории $v_0 = 0 \Rightarrow g = \frac{v_{Ay} - 0}{t}$, $t = \frac{v_{Ay}}{g}$

по формуле равноускор. движ.,

$h = v_{Ay} t - \frac{g t^2}{2} = \frac{v_{Ay}^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_{Ay}^2}{g^2} = \frac{v_{Ay}^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{8g}$

Ответ: $\frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{8g}$

Черновик.

$t = 15c$

$v = 100$ км/ч

$\ell - ?$

100 км/ч $= \frac{100}{1000} \cdot 3600$ м/с $= 360$ м/с

$\ell = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v}{2t} \cdot t^2 = \frac{vt}{2}$

$v_0 = 0$ $\quad a = \frac{v}{t}$

$\ell = \frac{360 \cdot 15}{2} = 180 \cdot 15 = \underline{2700}$ (м)

18 · 15 = 90 + 180 = 270

$a = 90$ м

$b = 60$ м

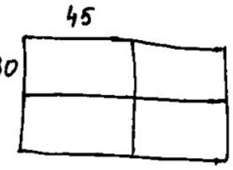
$h - ?$

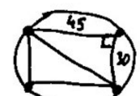
$S = ab = 5400$ м^2

365 · 365 = 1825 + 2190 + 1095 = 133225

45

30





$\sqrt{45^2 + 30^2} = 15\sqrt{3^2 + 2^2} = 15\sqrt{13}$

! $R \geqslant \frac{15\sqrt{13}}{2} \approx \frac{15 \cdot 3{,}6}{2} = 15 \cdot 1{,}8 = 27$

$\frac{55{,}5}{2} = 27{,}75$

$3{,}5^2 = 12{,}25$

36 · 36 = 216 + 108 = 12,96

37 · 37 = 259 + 111 = 13,69

1369 | 37: 111, 259, 259 → 37

37 · 15 = 185 + 37 = 555

37 · 15 = 185 + 37 = 555

555 | 15: 45, 105 → 37

$t_B = 3$ ч видео

$t_T = 5$ ч тетрис

80 км/ч

60 км/ч

$\ell - ?$

$2t$

$v_B = \frac{x}{3ч}$ $\quad v_T = \frac{x}{5ч}$

$(v_B + v_T)t = x$

$\left(\frac{1}{3ч} + \frac{1}{5ч}\right) t = 1$

$\frac{5ч + 3ч}{15ч^2} = \frac{8}{15} t = 1 \Rightarrow t = \frac{15}{8}$ ч

$2t = \frac{15}{4}$ ч

$\frac{\cancel{4} \cdot 60 \cdot \cancel{10} \cdot 15}{\cancel{140}\ 7} = \frac{1800}{7}$

$30 \cdot 6$

$v_{ср} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{2v_1} + \frac{\ell}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} =$

$= \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 6\cancel{0}}{14\cancel{0}} = \frac{12 \cdot 80}{14} = \frac{12 \cdot 40}{7} = \frac{480}{7}$

15 · 12 = 30 + 15 = 180

$\ell = v_{ср} t = \frac{\overset{120}{\cancel{480}}}{7} \cdot \frac{15}{4} = \frac{1800}{7}$ (км)

$\boxed{257 \text{ км}}$

1800 | 7: 14, 40, 35, 50, 49, 1 → 257

257 · 7 = 1799

$257\frac{1}{7}$

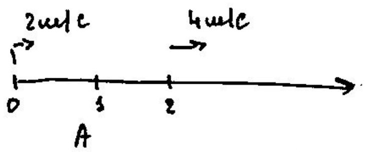
Черновик

$$v_{Ay} = \frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2} \qquad v_{Ay} = gt \Rightarrow t = \frac{v_{Ay}}{g}$$

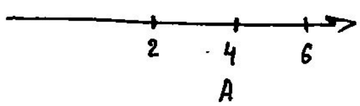
$$v_{Ax} = \frac{v_1 \cos\beta + v_2 \cos\alpha}{2} \qquad \Delta h = v_{ay} \cdot t = \frac{v_{ay}^2}{g}$$

$54 < h \leq 54{,}15$

$27 < h \leq 27{,}075$



$vA = 3$



$\frac{1}{2} \; 15 \cdot 3{,}6 = \frac{54}{2} = 27$

$\frac{1}{2} \; 15 \cdot 3{,}7 = \frac{555}{2} = 27{,}75$

$\frac{1}{2} \; 15 \cdot 3{,}65 = \frac{54{,}75}{2}$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times\, 361 \\ \hline 361 \\ 2166 \\ 1083 \\ \hline 13{,}0321 \end{array}$$

$36{,}0 < \sqrt{13} < 36{,}1$

$x \geqslant \frac{15\sqrt{13}}{2}$

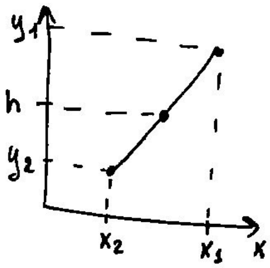
$x \geqslant \frac{15 \cdot 36{,}1}{2}$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times\, 15 \\ \hline 1805 \\ 361 \\ \hline 5415 \end{array}$$

$\frac{15\sqrt{13}}{2}$ 54, 2

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times\, 361 \\ \hline 361 \\ 2166 \\ 1083 \\ \hline 13{,}0321 \end{array}$$

Черновик.



~~h = y1 + y2~~ $h = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$\Delta l = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$ $\Delta x^2 = (v_1 \cos\beta - v_2 \cos\alpha)^2$

$\Delta y^2 = (v_1 \sin\beta - v_2 \sin\alpha)^2$

$\Downarrow$

$\Delta l = \sqrt{v_1^2\cos^2\beta + v_1^2 \sin^2\beta + v_2^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2v_1v_2 \sin\alpha \sin\beta - 2v_1v_2\cos\alpha\cos\beta} =$

$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)}$

$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}$

$mv_1^2 + v_2^2$

---

5. $\sin t + \cos t = a \Rightarrow$ $a^2 = 1 + 2\sin t \cos t \Rightarrow$

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $\sin t \cos t = \frac{a^2 - 1}{2}$

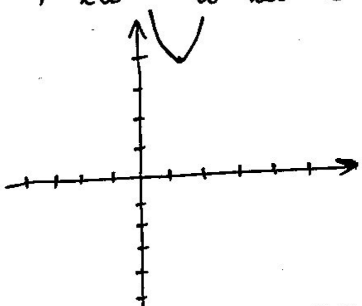
$\frac{1}{c} = 3 + \frac{a^2-1}{2} - a \quad | \cdot 2 \Rightarrow$

$\frac{2}{c} = 6 + a^2 - 1 - 2a = a^2 - 2a + 5$

$2a - 2 = 0$

$a = 1$

$1 - 2 + 5 = 4$



$\frac{D}{4} = 1 - \cancel{1}(5 + x) = 0$

$a^2 - 2a + 1$

минимум: 4

максимум: или $2 - 2\sqrt{2} + 5$

или $\boxed{2 + 2\sqrt{2} + 5} = \underline{7 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\frac{2}{c} \in [4; 7 + 2\sqrt{2}] \Rightarrow$

$c \in$

$\cos t - \sin t = 0 \Rightarrow$

$\sin t = \cos t$

$\frac{1}{\frac{1}{160} + \frac{1}{120}} = \frac{160 \cdot 120}{160 + 120} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 80}{60 + 80}$

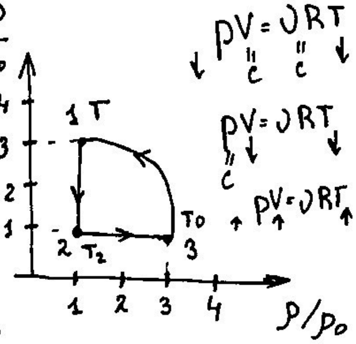
4.

Черновик

1: $V = const$ $\quad 3P_0 \to P_0$

2: $\rho = const$ $\quad \rho_0 \to 3\rho_0$

3: возвращ., окр. ц. $(1;1)$



$\downarrow pV = \nu RT \downarrow$

$pV = \nu RT \downarrow$

$\uparrow pV = \nu RT \uparrow$

12: $T\downarrow$

23: $T\downarrow$

31: $T\uparrow$

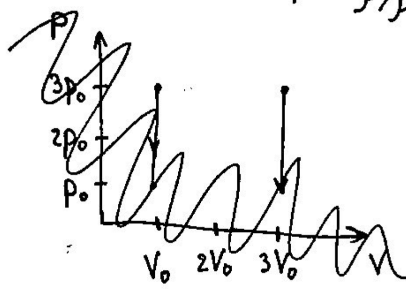
T_1 - макс.

T_3 - мин.

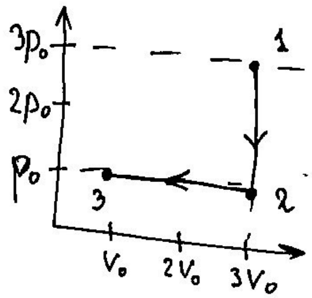
$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$P = \rho \cdot \frac{RT}{M}$$

$V = const \Rightarrow \rho = const$



$$\rho = \frac{m}{V} \quad \rho\uparrow \Rightarrow V\downarrow$$



$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 = r^2$$

Карно: $\frac{T_1 - T_0}{T} = \eta$

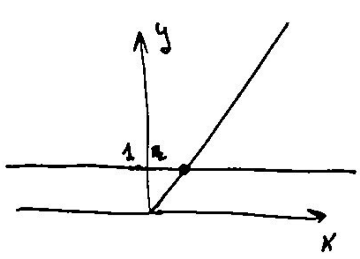
$3p_0 \cdot 3V_0 = \nu RT, \quad 9p_0V_0 = \nu RT$

$p_0V_0 = \nu RT_0 \Rightarrow T_0 = \frac{T}{9}$

Карно: $\frac{T - \frac{T}{9}}{T} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = \eta \Rightarrow \eta_0 = \boxed{\frac{1}{9}}$

5.
$$\begin{cases} x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$y = cx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{c}$



$$\frac{1}{c} = 3 + \sin t_0 \cdot \cos t_0 - \sin t_0 - \cos t_0$$

$\sin x + \cos x$

Целиком может быть равно

$$\underbrace{\sin x \cos x}_{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}} - \underbrace{(\sin x + \cos x)}_{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}} = \frac{1}{c} - 3$$

минимум: $-\frac{1}{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{c} - 3 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{5}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$c = \frac{2}{5 - 2\sqrt{2}}$$

максимум: $\frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{c} - 3 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{7}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}, \quad c = \frac{2}{7 + 2\sqrt{2}}$