МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Ермолаев Фёдор Андреевич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ермолаев Фёдор Андреевич

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	100 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

~~черновик 1.~~

~~черновик~~ черновик 1.

100 км/ч $= 100 \cdot \frac{1000}{3600}$ м/с $= \frac{100}{3,6}$ м/с

$36 \cdot 1$
$72 \cdot 2$
$144 - 4$
$288 - 8$

$1000 : 36 = 27,777$
-72
280
-252
280

$27,777 \cdot 15$

$2777 \cdot 15$
$+12885$
2777

$45^2 + 30^2 = (15 \cdot 3)^2 + (15 \cdot 2)^2 = 15^2 \cdot 13.$

$60 \to 30 \to 15$

$\frac{0,7 \cdot 15}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25$

$1,7 = 42$

$15 \cdot 7 = 10,5$

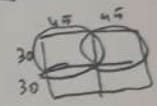
$27,7777 \cdot 15$
$+138885$
277777
$416,6655$

$4\pi R^2 = 30 \cdot 60$

$R^2 = \frac{30 \cdot 15}{\pi}$

$9 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 = 9 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3$

$35 \sqrt{\frac{6}{\pi}}$



8
16
24

$\frac{6}{3,2} < \frac{6}{\pi} < \frac{6}{3} = 2$

R

$\sqrt{1,87} < \sqrt{\frac{6}{\pi}} < \sqrt{1,93}$

$15 \cdot 2$

$6 : 3,2 = 1,87$
-32
280
-256
240

$6 : 3,1 = 1,93$
-31
290
-279
110
-93
170

$1,3 \cdot 1,3$
39
13
$1,69$

$\sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 1,38$

$35 \cdot 1,38 \approx 70$

$R \geq 70$ м.

$u_1 \frac{t}{2} + u_2 \frac{t}{2} = t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = 9$

$S = \frac{15}{4} \cdot \frac{40 \cdot 12}{7} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 10}{7}$

$\frac{S}{2t_1} + \frac{S}{2t_2} \quad t = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

$\frac{1}{120} + \frac{1}{160} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{40} =$

$4\pi R^2 \geq 30 \cdot 60$

$1,41 \cdot 15$
705
$+141$
$21,15$

$S = \frac{15}{4} \cdot \frac{12 \cdot 40}{7} = \frac{180}{7}$

$R^2 \geq \frac{30 \cdot 15}{\pi}$ $\quad \lambda = 30$

$R \geq \sqrt{\frac{9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}{\pi}} = 15\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ $\quad 2R \geq 2x$ $\quad R \geq x$

$15 \cdot 12$
30
15
180

$180 : 7 = 25,$
-14
40
-35
50

$2 = \frac{6}{3} \geq \frac{6}{\pi} \geq \frac{6}{3,2} = 1,87\ldots$

$3x \quad 2x$

$25 \cdot 7 = 175$

$\sqrt{2} \geq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \geq \sqrt{\ }$

$1,4 \cdot 15$

$15\sqrt{\frac{6}{\pi}} \geq 15\sqrt{2} \approx 15 \cdot 1,4 \approx 21,15$

$\sqrt{13} = 3,2$

Черновик 2.

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ \times\ 3,2 \\ \hline 64 \\ +\ 96 \\ \hline 10,24 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3,8 \\ \times\ 3,8 \\ \hline 304 \\ +\ 114 \\ \hline 14,44 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3,7 \\ \times\ 3,7 \\ \hline 259 \\ +\ 111 \\ \hline 13,69 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3,75 \\ \times\ 3,75 \\ \hline 1875 \\ +\ 2625 \\ 20 \\ \hline \end{array}$$

$8 \to 16 \to 24$

$8 \quad 8 \cdot 3 = 24$

$$\begin{array}{r} 3,75 \\ \times\ 3,75 \\ \hline 1875 \\ +\ 2625 \\ 1125 \\ \hline 1\ 39625 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3,6 \\ \times\ 3,6 \\ \hline 216 \\ +\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3,61 \\ \times\ 3,61 \\ \hline 361 \\ 2166 \\ 1083 \\ \hline 13,0321 \end{array}$$

$3,6 \cdot \frac{15}{2}$

$$\begin{array}{r} 3,61 \\ \times\ 3,61 \\ \hline 361 \\ +\ 2166 \\ 1083 \\ \hline 13,0321 \end{array}$$

$\frac{15}{2} \cdot 3,6 = 15 \cdot 1,8 = 27$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 15 \\ \hline 90 \\ +\ 18 \\ \hline 270 \end{array}$$

$\frac{15}{2} \cdot 3,61$

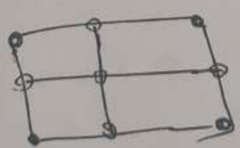
$$\begin{array}{r} 3,61 \\ \times\ 15 \\ \hline 1805 \\ 361 \\ \hline 54,15 \end{array}$$

$\frac{54,15}{2} = 27,07\ldots$

$\frac{1}{120} + \frac{1}{160} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{40}$

$S = \frac{15}{4} \cdot \frac{12 \cdot 40}{7} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 10}{7} = \frac{1800}{7}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 12 \\ \hline 30 \\ +\ 15 \\ \hline 180 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 18 \\ \hline 120 \\ +\ 15 \\ \hline 270 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 1800 \;\big|\; 7 \\ \underline{-14}\quad\ 257,14 \\ \ \ 40 \\ \ \underline{-35} \\ \ \ \ 50 \\ \ \ \underline{-49} \\ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \ \underline{-7} \\ \ \ \ \ 30 \\ \ \ \ \underline{-28} \\ \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

чистовик 1.

№1.

$v = 100$ км/ч $= 27{,}77\ldots$ м/с

$t = 15$ с

$S[м] = ?$

~~1) $\frac{v^2-0^2}{v2}$ $v_{cp} = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2}$~~

~~$S = v_{cp} t = \frac{vt}{2} = \frac{27{,}77\ldots \cdot 15}{2}$~~

~~Заметим, что $\frac{0{,}07 \cdot 15}{2} = \frac{105}{2}$ $\frac{1{,}05}{2} = 0{,}525 < 1$~~

1) $v_{cp} = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2}$ 2) $S = v_{cp} t = \frac{vt}{2} = \frac{27{,}77\ldots \cdot 15}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 416{,}6666\ldots = 208{,}3333$ м

$[S] = 208$ м.

Ответ: $S = 208{,}333\ldots$ м ≈ 208 м.

№3

$\frac{t}{2}$ $\frac{t}{2}$

Тетрис Мультики.

$\frac{S_1}{2}$ – $v_{cp_1} = 80$ км/ч

$\frac{S_2}{2}$: $v_{cp_2} = 60$ км/ч

Пусть скорость разрядки при игре

1) в Тетрис – u_1; мультики – u_2:

Полный заряд:

$X = u_1 \frac{t}{2} + u_2 \frac{t}{2} = 3u_2 = 5u_1$

$\Rightarrow u_2 = \frac{5}{3} u_1$;

$\frac{t}{2}\left(\frac{5}{3}+1\right) u_1 = 5u_1$

$t = \frac{10}{8/3} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ часа – все время.

Пусть все расстояние S.

2) t - время движения - известно.

$\frac{S}{2}$ за t_1 и t_2 соответственно. Тогда:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = t \\ \frac{S}{2t_1} = v_{cp_1} \\ \frac{S}{2t_2} = v_{cp_2} \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = \frac{15}{4} - t_1 \\ t_1 = \frac{S}{2v_{cp_1}} = \frac{S}{160} \\ t_2 = \frac{S}{120} \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{120} + \frac{S}{160} = \frac{15}{4}$$

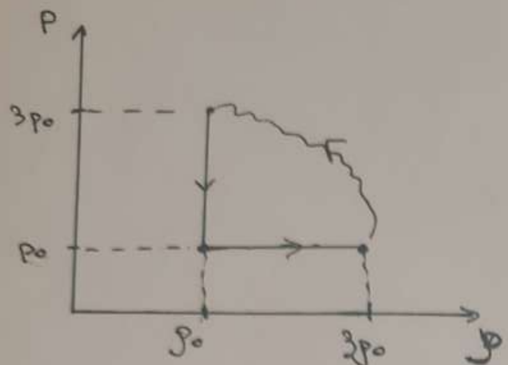
$\Rightarrow S = \frac{15}{4} \cdot \frac{12 \cdot 40}{7} = \frac{1800}{7}$ км

~~$S = 25\frac{5}{7}$ км ≈ 26 км.~~ $S = \frac{1800}{7} = 257{,}14\ldots \approx 257$ км

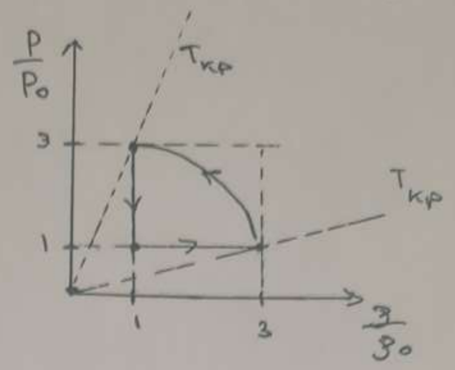
~~Ответ: $S = 25\frac{5}{7}$ км $= 26$ км~~ Ответ: 257 км.

№ 4.

1) При изохорном процессе: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu \nu}{V} = const$ [газ извне не поступает]



$\rightarrow$



2) $pV = \frac{m}{\mu} RT \rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow T = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{p}{\rho}$.

изотерма имеет вид: $\frac{p}{\rho} = Const \rightarrow p = \alpha \rho$ - линейная зависимость

$\Rightarrow$ и наиб. и наим. температуры в точках $(3p_0; \rho_0)$ $(p_0; 3\rho_0)$ - когда коэфф. наклона принимает экстремум. прямой из (0;0)

$$T_{max} = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{3p_0}{\rho_0} = 3T_0; \quad T_{min} = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{p_0}{3\rho_0} = \frac{1}{3}T_0$$

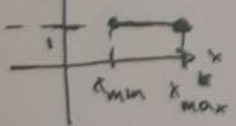
3) $\eta_{карно} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{3} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}$ - КПД цикла, максимального на этих температурах

4) $\eta = \frac{1}{8} \eta_{карно} = \frac{1}{9}$ - КПД нашего цикла.

Ответ: $\eta = \frac{1}{9}$.

№5.

1) $y(t) = 1 = const \rightarrow$
$x(t) = 3 + \sin t \cos t - \sin t - \cos t$ $\Big| \Rightarrow$ уравнение задает отрезок, параллельный Oy. [очев. непрерывный]



2) $f(t) = 3 + \sin t \cos t - \sin t - \cos t$ - найдем экстремумы

$$f'_t = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t = 0$$

$$(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t) + \sin t - \cos t = 0$$

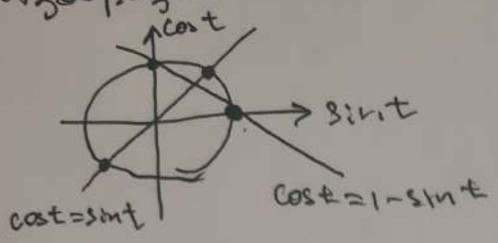
$$\left[\begin{array}{l} \cos t - \sin t = 0 \\ \cos t + \sin t - 1 = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \cancel{\cos t = \sin t} \\ \sin(t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos t = \sin t \\ \cos t = 1 - \sin t \end{array}\right.$$

см. след. лист.

чистовик-3.

Изобразим в осях $\sin t$; $\cos t$:



точки пересечения, очевидно:

$$\left[\begin{array}{l} \sin t=0;\ \cos t=1 \\ \sin t=\cos t=\pm\frac{\sqrt2}{2} \\ \sin t=1;\ \cos t=0 \end{array}\right.$$

3) Подставим:

$$x_1 = 3+0\cdot1-0-1 = 3-1=2$$

$$x_2 = 3+1\cdot0-0-1 = 3-1=2$$

$$x_3 = 3+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2} = 3+\frac12-\frac{2}{\sqrt2} = \frac72-\sqrt2$$

$$x_4 = 3+\frac{-1}{\sqrt2}\cdot\frac{-1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2} = \frac72+\sqrt2.$$

$$2 \overset{<}{\vee} \frac72-\sqrt2$$

$$4 \overset{<}{\vee} 7-2\sqrt2$$

$$2\sqrt2 \overset{<}{\vee} 3$$

$$8 \overset{<}{\vee} 9$$

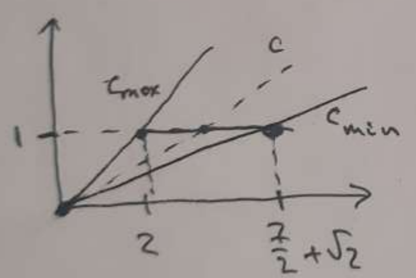
$$\Rightarrow \quad x_{min}=2, \quad x_{max}=\frac72+\sqrt2.$$

$$\frac72+\sqrt2 > 2$$

$$\sqrt2 > \frac12$$

$$2 > \frac14.$$

4)



$y=cx$ - задает лучи из $(0;0)$

c_{max}, c_{min} - при которых ещё возможно пересечение:

$$c_{max}\cdot2=1 \Rightarrow c_{max}=\frac12$$

$$c_{min}\cdot\left(\frac72+\sqrt2\right)=1 \Rightarrow c_{min}=\frac{1}{\frac72+\sqrt2}$$

$$\Rightarrow \quad c\in\left[\frac12;\ \frac{2}{7+2\sqrt2}\right]$$ - при таких c

$y=cx$ хотя бы раз пересекает отрезок.

Ответ: $\cancel{c\in\left[\frac12;\ \frac{2}{7+2\sqrt2}\right]}$

$$c\in\left[\frac{2}{7+2\sqrt2};\ \frac12\right]$$ - точнее так

$(c_{max} > c_{min})$.

чистовик 4.

№6.

1) На систему из двух шариков действует единственная внешняя сила – сила тяжести. Значит, центр масс – она же центр пружинки (т.к. массы равны) – будет двигаться как камень, брошенный под углом к горизонту.

2) Найдем скорость центра масс в проекции на вертикаль в нач. мом.:

$$V_0 = \frac{m v_1 \sin\beta + m v_2 \sin\alpha}{m+m} = \frac{1}{2}(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)$$

3) Из кинематики:

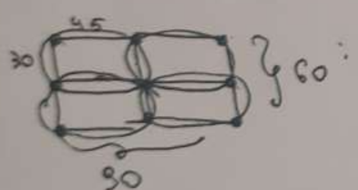
$$\frac{0 - V_0^2}{-2g} = H$$ – где H – максимальная высота подъема:

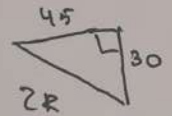
$$\Rightarrow H = \frac{1}{8}\frac{(v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha)^2}{g}.$$

Ответ: $H = \dfrac{(v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha)^2}{8g}$

№2.

1) Можно осветить так:





По Th. Пифагора:

$4R^2 = 45^2 + 30^2 = (15\cdot 2)^2 + (15\cdot 3)^2 =$
$= 15^2\cdot(4+9)$

$\Rightarrow$ ~~$2R =$~~

$\Rightarrow 2R = 15\cdot\sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{15}{2}\sqrt{13}$

2) Пусть $R < \frac{15}{2}\sqrt{13}$. Тогда каждый из прямоугольников 45×30 – не может целиком покрыться ровно одним кругом. – (радиус меньше радиуса опис.) $\Rightarrow$ нужен хотя бы еще один круг. ~~rtg~~

3) Заметим, что:

$3{,}6^2 = 12{,}96$; $3{,}61^2 = 13{,}0321$

$\Rightarrow 3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}61$

см. след. лист.

$\Rightarrow \frac{15}{2}\cdot 3{,}6 = 27 < R < \frac{15}{2}\cdot 3{,}61 = 54{,}15\cdot\frac{1}{2} = 27{,}07\ldots$

~~$\Rightarrow R = 27$ м.~~ $\Rightarrow$ $R = 27{,}1$ м – подходит
[27 – уже не подходит]

Ответ: 27,1 м.

чистовик 5.

$\Rightarrow 27 < R < 27{,}~~09~~08 \rightarrow$ минимально подходящий: 27,1 м

4) Докажем, что меньше нельзя.

~~Если $R < \frac{15}{2}\sqrt{13}$, то из четырех точек каждого такого прямоугольника 30×45 - можно осветить не более двух.~~

Если $R < \frac{15}{2}\sqrt{13}$, то в каждом из 4 прямоугольников 45×30 такого вида нельзя осветить одновременно две противоположные вершины - т.к. расстояние между ними $15\sqrt{13}$ - (одним кругом). Но угол осветить обязательно нужно - и это сделает каждый из 4х прожекторов. Значит, центральную точку никто освещать не может. Значит, при $R < \frac{15}{2}\sqrt{13}$ - невозможно осветить всё поле.

Ответ: ~~27,01~~ 27,1 м