МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Ефимов Никита Петрович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ефимов Никита Петрович

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	90 баллов

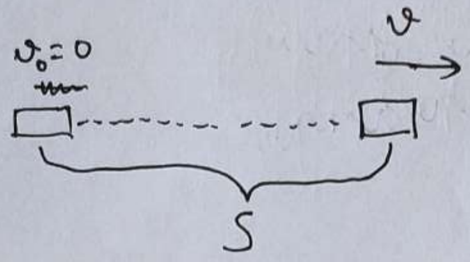
* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик №1 **1**

Дано:
$t = 15\,с$
$\vartheta = 100\,\frac{км}{ч}$

$S - ?$

Решение:



1) т.к. $\vec{a} = const$, то

2) $S = \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \cdot t$

$S = \frac{\vartheta t}{2}$

$$S = \frac{100\,\frac{км}{ч} \cdot 15\,с}{2} = \frac{100 \cdot \frac{1000}{3600}\,\frac{м}{с} \cdot 15\,с}{2} = \frac{\frac{1000}{36} \cdot 15}{2}\,м$$

$$S = \frac{250 \cdot 15}{9 \cdot 2}\,м = \frac{250 \cdot 5}{3 \cdot 2}\,м = \frac{125 \cdot 5}{3}\,м = \frac{625}{3}\,м \approx 208\,м$$

Ответ: Длина разбега $S = 208\,м$

Черновик

10

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

$((\sin\alpha-1)(\cos\alpha-1))'=$

~~$(x-1)^2+($~~ $b=\frac{1}{x}$

$=(\sin\alpha-1)'(\cos\alpha-1)+(\sin\alpha-1)\cdot(\cos\alpha-1)'$

$\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{b}\right)^2+(y-1)^2=4$

$(\sin\alpha)'(\cos\alpha-1)+(\sin\alpha-1)(\cos\alpha)'$

$\cos\alpha(\cos\alpha-1)+-\sin\alpha(\sin\alpha-1)$

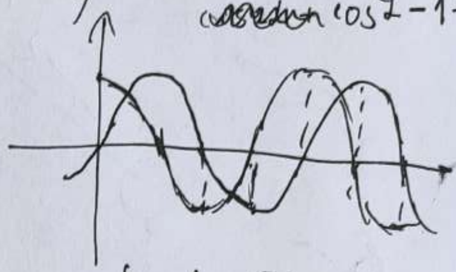
$\left(\frac{1-b}{b}\right)^2+(y-1)^2=4$

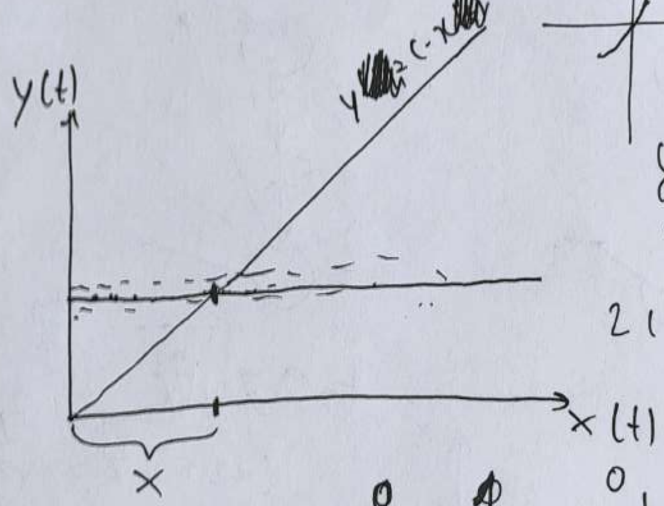
$\cos^2\alpha-\cos\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha$

$\left(\frac{b-1}{b}\right)^2+(y-1)^2=4$

$\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha$





$y=1.=Cx.$

$y=$

$2\cos^2\alpha-\cos\alpha+1\pm\sin\alpha=0$

$\cos^2\alpha$

x $\quad 3+\sin t\cdot\cos t-\sin t-\cos(t)=\frac{1}{C}$

$3+a\cdot b-a-b=\frac{1}{c}$

$3+\sqrt{1-b^2}\cdot\cos b^2-\sqrt{1-b^2}-b^2=\frac{1}{c}$

$\sin$ $\quad 3+\sin t\cdot\cos t-\sin t-\cos t)=\frac{1}{c}$

$(\sin(t)-1)'$ $\quad 3+\sin t(\cos t-1)-\cos t)$

$2+\sin t(\cos t-1)-\cos t+1=\frac{1}{c}$

$2+\sin(t)(\cos(t)-1)-1(\cos(t)-1)=\frac{1}{c}$

$2+(\sin(t)-1)(\cos(t)-1)=\frac{1}{c}$

Черновик 11

v_1 – скорость разгрузки при матрице

$t_1 = \frac{t}{2}$ – матрица $\quad v_1 = \frac{A}{5 \text{ часа}}$

$t_2 = \frac{t}{2}$ – мульчина $\quad v_2 = \frac{A}{3 \text{ часа}}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$

$A = v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}$

3,75.

$A = (v_1 + v_2)\frac{t}{2}$

$A = \left(\frac{A}{t_{10}} + \frac{A}{t_{20}}\right)\frac{t}{2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{t_{10}} + \frac{1}{t_{20}}\right)\frac{t}{2}$

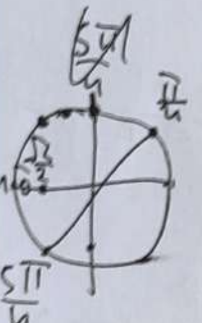
$2 + (-1)(0-1) = 21$

$t = \frac{2}{\frac{1}{t_{10}} + \frac{1}{t_{20}}} = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}} ч = \frac{2}{\frac{3+5}{15}} = \frac{2 \cdot 15}{8} =$

$t = \frac{15}{4} ч = 3,75 ч$

35

$0,7^2 =$



$\frac{S}{2} \qquad \frac{S}{2}$

$v_1 = 80 \frac{км}{ч} \qquad u_2 = 60 \frac{км}{ч}$

$1800 : 7 = 257,1$

-14, 40, -35, 50, -49, 10

$257 \cdot 7 = 1799$

$15 \cdot 12 = 180$ (30, 15)

$T_1 = \frac{S}{2u_1} \qquad T_2 = \frac{S}{2u_2}$

$2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$

$t = T_1 + T_2$

$2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right)$

$t = \frac{S}{2u_1} + \frac{S}{2u_2} \Rightarrow t = \frac{S}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right)$

$2 - \left(\frac{2^2}{4} - 1\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

13 12 10

$\frac{2t}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}} = S.$

$\frac{\frac{15}{2}}{\frac{60+80}{80 \cdot 60}} = \frac{\frac{15}{2}}{140} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 100$

$\frac{\frac{15}{2}}{\frac{7}{8 \cdot 6 \cdot 5}} = \frac{15 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 7}$

$\frac{60+80}{80 \cdot 60} = \frac{140}{8 \cdot 6 \cdot 100} = \frac{7 \cdot 2}{8 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{7}{8 \cdot 6 \cdot 5}$

Черновик

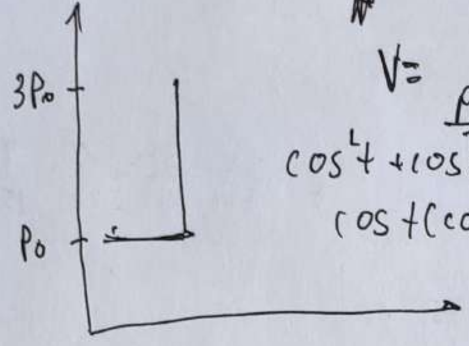
$\cos t = \sin t - 1 \quad \rho_0 =$

$\cos t = \sin t - \sin^2 t - \cos^2 t$

$(1{,}7)^2 = 2{,}89 + 2 = \frac{100}{289}$

$\rho_0 V_0 = \nu R T_0$

$\rho = \frac{pM}{RT}$



$V =$

$\frac{pV}{T} = const$

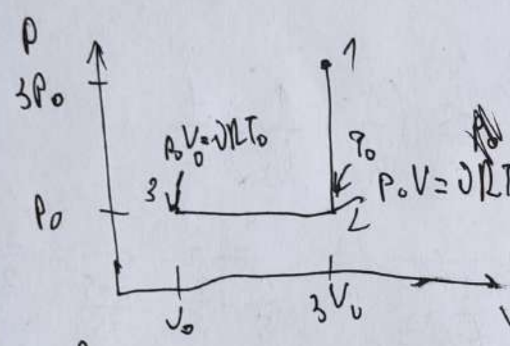
$\cos^2 t + \cos t = \sin t - \sin^2 t \quad pV = \nu RT$

$\cos t(\cos t + 1) = \sin t(1 - \sin t) \quad = \frac{m}{V\mu} RT$

$\rho R T_0 = const = p_0 \mu$

$p\mu = \rho RT \Rightarrow \rho_1 = \frac{p_0 \mu}{RT_0}$

$V \quad \cos t = -\sin t$



$p_0 V = \nu R T_1 = \nu R \frac{T_0}{3}$

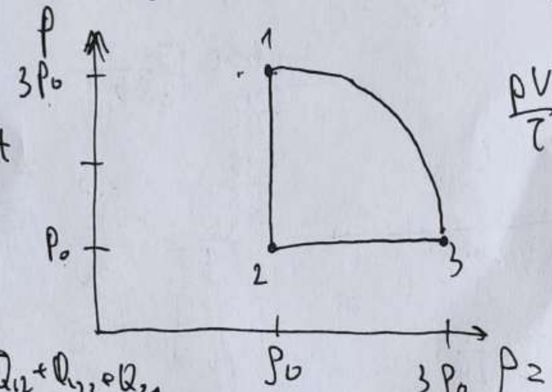
$3\rho_0 = \frac{p_0 \mu}{RT} \Rightarrow T =$

$p_0 \mu = 3\rho_0 RT \quad T = \frac{T_0}{3}$

$p_0 \mu = \rho_0 R T_0$

~~$3\rho_0 R T_0 = \rho p T$~~

$V - \frac{1000}{987} \quad \frac{489}{2}$



$\cos t$

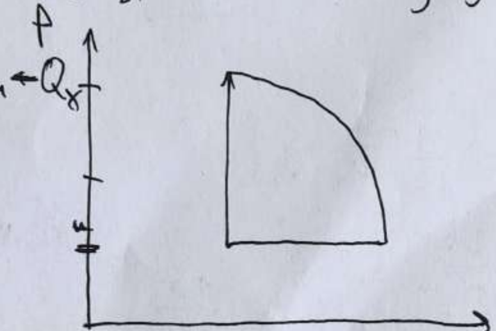
$\frac{pV}{T} = const$

~~$\left(\frac{p\mu}{\rho_0 R T_0}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{p_0} + \frac{\rho}{\rho_0}\right) = 2$~~

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - 2\frac{p}{p_0} - 2\frac{\rho}{\rho_0} = 2$

$A_\Sigma = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$

$A_\Sigma = Q_H - Q_X$

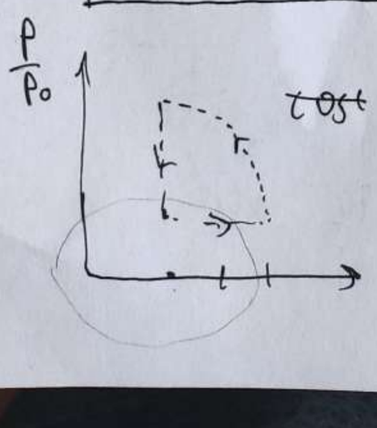


$(x+a)^2 + (y+b)^2 = R^2$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} + 1 + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + 2\frac{p}{p_0} + 1 = 4$

$\frac{\rho\mu}{RT} = V$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2 = 2^2$



$\left(\frac{p\mu}{\rho_0 R T} - 1\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2 = 4$

$-x(-x-1) = x(x-1)$

$x + 1 - x - 1$

Черновик.

13

$36 \times 2 = 72$

36×9

~~t = 15 см~~

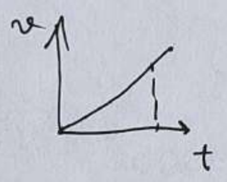
$v_0 = 0$

$v = 100 \frac{км}{ч} = 100 \frac{1000 м}{3600 с} = \frac{1000}{36}$

$1000 : 36 = 2$, 72, 280

$\frac{1000}{36} = \frac{500}{18} = \frac{250}{9} =$

$250 : 9 = 27{,}777\ldots$ (18, 70, 63, 70, 63, 70)



$\eta = 1 - \frac{T_0}{9T} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\frac{250 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{125 \cdot 5}{3} = \frac{625}{3}$

$125 \times 5 = 625$

$\times 25$

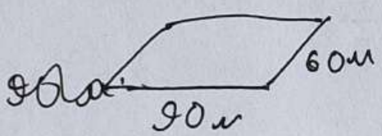
$625 : 3 = 208{,}33$ (6, 25, 24, 10, 9, 10)

$208 \times 3 = 624$

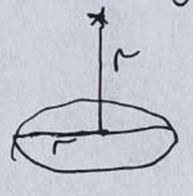
$\vartheta c_v (T_2 - T_1)$

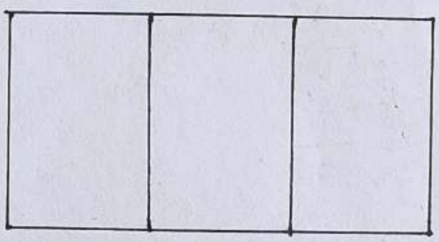
$\frac{3}{2}$

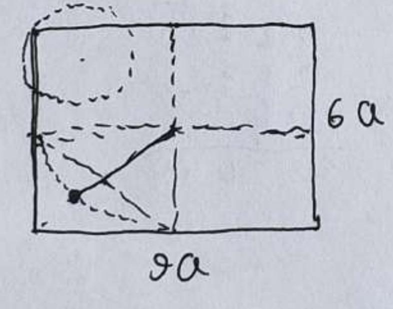
$a = 10 м$

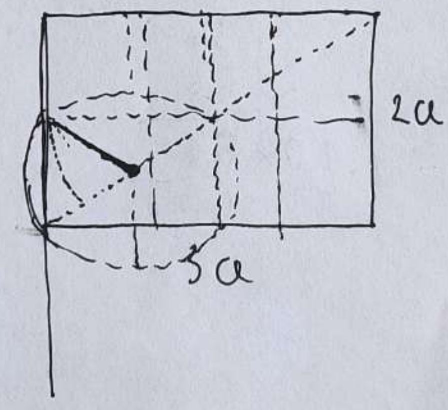


$a = 30 м$

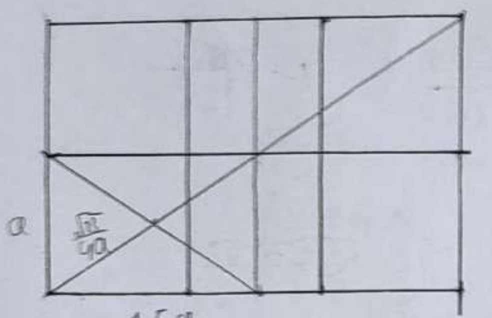








Черновик



1,5a

$3,14 \times 4 = 12,56$ 13,6

$a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{4}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{13}{4}a^2 =$

$\frac{\sqrt{13}}{2}a$

$S = 4\pi r^2 = 12,56$

$S = 90 \cdot 60 = 5400\ м^2$

$\frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$

$35 \times 5 = 175$ $37 \times 7 = 259$

$\sqrt{\frac{13}{16}}$

$35 \times 3 = 105$ $90 + 21 = 111$

$361 \times 5 = 1805$

$3,5 \times 3,5$: 175, 105, $12,25$

$3,7 \times 3,7$: 259, 111, $13,69$

$\frac{30 \cdot 3,61}{4} =$

$361 \times 7 = 2527$ 21

$13,6$; $3,6 \times 3,6$: 216, 108, $12,96$

$36 \times 6 = 216$ 18

$3,61 \times 7,5$: 1805, 2527, $28,075$

$7 + 7 = 14$, $14 + 6 = 20$

$6 \cdot 6 = 36$

3,69

18

$362 \times 6 = 2172$

$362 \times 3 = 1086$

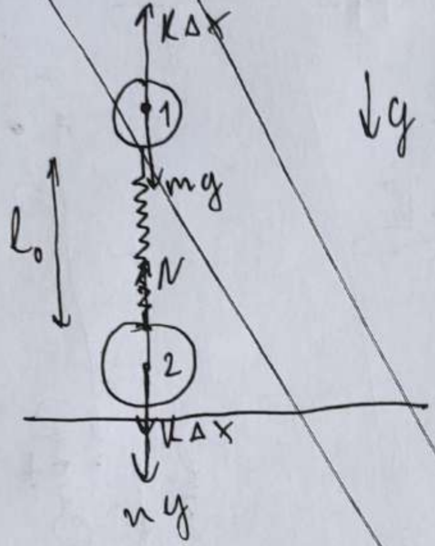
$3,61 \times 3,61$: 361, 2166, 1083, $13,0321$

$3,62 \times 3,62$: 724, 2172, 1086, $13,1044$

№6 Черновик

15

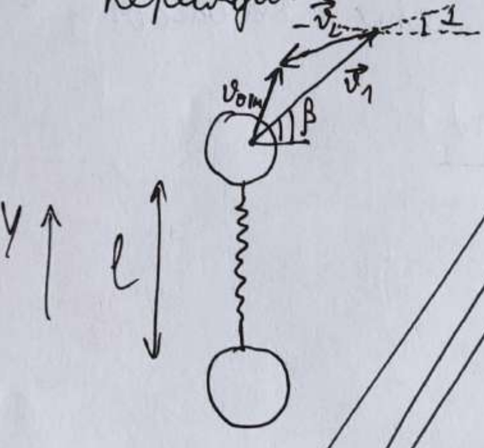
Рассмотрим систему до воздействия



$\downarrow g$

$mg = k\Delta x$

Рассмотрим систему после воздействия и перейдем в СО 2 шарика!



Нас просят найти высоту так что движение по оси x не интересует.

при $l = l_{MAX}$; $v_{отн\,y} = 0$

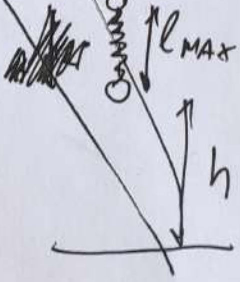
В СО 2 шарика первый колеблется с $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

В положении равновесия $l = l_0$; $mg = k\Delta x$

В амплитудном положении $l_{MAX} = l_0 + A$

Энергия в СО Земли при $v_{отн} = 0$.

$E = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + mgh + mg(h + [illegible])$



Черновик

16

На систему тел действует внешняя сила $2m\vec{g}$,

тогда $\vec{g} = \cancel{a_{цм}} = \vec{a}_{цм}$

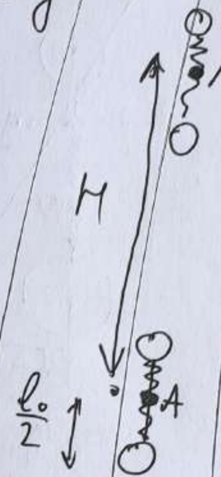
$$H = \frac{(v_{цм0})^2}{2g}$$

$$\cancel{H = \frac{v_1 \sin\beta - v_2 \sin\beta + \ldots}{2}}$$

$$\vec{v}_{цм} = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{2m} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} =$$

$$v_{цм0} = \frac{v_1 \sin\beta - v_2 \sin\alpha}{2}$$

$$H = \frac{(v_1 \sin\beta - v_2 \sin\alpha)^2}{8g};$$

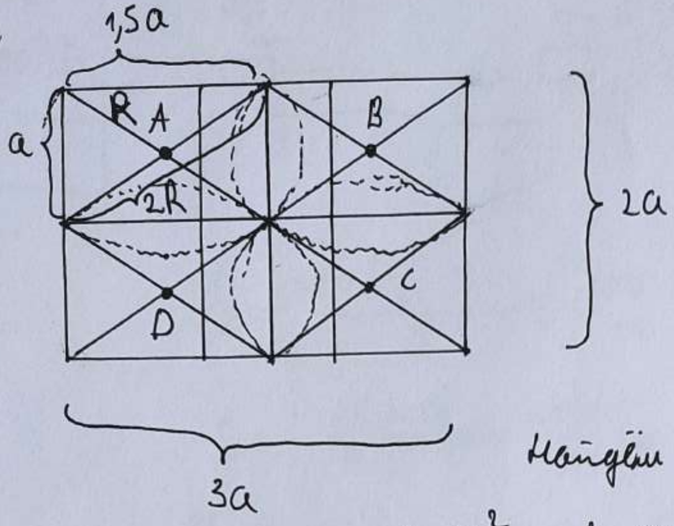


Ответ: центр масс поднимется на высоту равную $\frac{l_0}{2} + \frac{(v_1 \sin\beta - v_2 \sin\alpha)^2}{8g}$

Чистовик №2

2

Пусть $a = 30$ м тогда:



R - радиус окружности должен быть максимально возможным и удовлетворять условию

Тогда окружности должны занимать по четыре равных сектора.

Найдём R по т. Пифагора:

$$(2R)^2 = a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2$$

$$(2R)^2 = a^2 + \frac{9}{4}a^2 \Rightarrow (2R)^2 = \frac{13}{4}a^2$$

$2R = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{13}}{4} < a$; ($\sqrt{13} \approx 3,61$; $3,61 \cdot 3,61 = 13,0621$)

$R = \frac{30\sqrt{13}}{4}$ м $= \frac{15}{2} \cdot 3,61$ м $= 7,5 \cdot 3,61$ м $\approx 28,1$ м < 30 м

Ответ: 28,1 м

Чистовик №3

1) $t_1 = \frac{t}{2}$ - время пока играл в Тетрис ; t - общее время

$t_2 = \frac{t}{2}$ - время пока ~~играл в~~ смотрел мультики

$v_1 = \frac{A}{t_{10}}$, где A - полная зарядка
v_1 - скорость разрядки при игре в Тетрис.
$t_{10} = 5$ ч

$v_2 = \frac{A}{t_{20}}$, где v_2 - скорость разрядки при просмотре мультиков

$$A = v_1 \cdot t_1 + v_2 t_2 \Rightarrow A = \left(\frac{A}{t_{10}} + \frac{A}{t_{20}}\right)\frac{t}{2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{t_{10}} + \frac{1}{t_{20}}\right)\frac{t}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{\frac{1}{t_{10}} + \frac{1}{t_{20}}} = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}\text{ч} = \frac{2 \cdot 15}{8}\text{ч} = \frac{15}{4}\text{ч} = 3{,}75\text{ ч}$$

2) $\frac{S}{2}$ за T_1 $\qquad$ $\frac{S}{2}$ за T_2

$u_1 = 80 \frac{км}{ч}$ $\qquad$ $u_2 = 60 \frac{км}{ч}$

$T_1 = \frac{S}{2u_1}$

$T_2 = \frac{S}{2u_2}$

$$t = T_1 + T_2 \Rightarrow t = \frac{S}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) \Rightarrow S = \frac{2t}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}} \Rightarrow$$

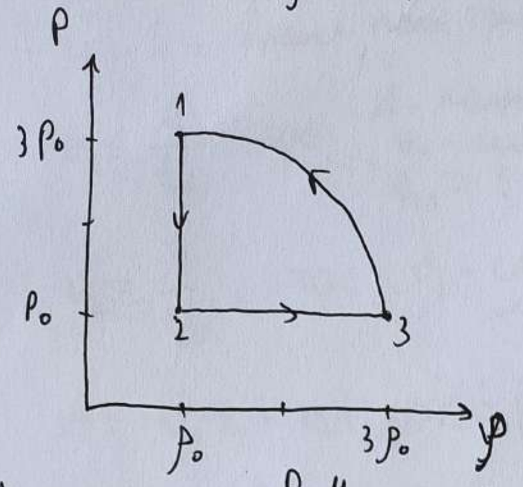
$$\Rightarrow S = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{1}{80} + \frac{1}{60}}\text{ км} = \frac{15}{\frac{1}{40} + \frac{1}{30}}\text{ км} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 100}{70} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 10}{7}\text{ км} = \frac{1800}{7}\text{ км}$$

$S \approx 257$ км

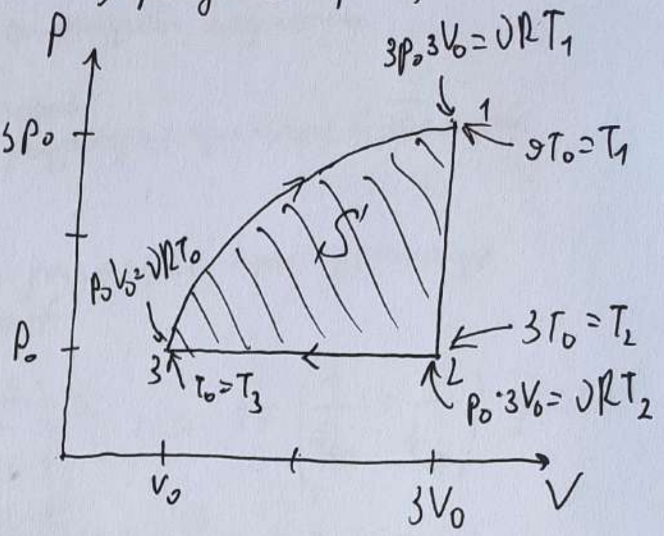
Ответ: $S \approx 257$ км

Черновик №4.

Процесс в $P(\rho)$ координатах



Процесс в $p(V)$



1) ~~1-2~~ $\rho = \frac{P\cdot\mu}{RT}$

$\frac{PV}{T} = const$ $\Rightarrow \rho = \frac{const}{V}$

1-2: ~~изобарное~~ изохорное уменьшение давления причём $\rho, V = const$.

2-3: изобарное увелич ↑↑ с ρ_0 до $3\rho_0$ => V↓↓ с $3V_0$ до V_0

3-1: ~~в $P(\rho)$~~ в $\frac{P}{P_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$ - окружность с радиусом 2 при которой P↑↑, а ρ↓↓, в $\frac{P}{P_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)$; P↑↑, а V↑↑ =>

=> тоже окружность с радиусом 2 (инвертированная)

~~относ. только ... 2V_0 в (~~

2) $A_\Sigma = +S = \pi \cdot 2V_0 \cdot 2P_0 = 4\pi P_0 V_0$

$Q_н = Q_{12}$

$Q_х = -Q_{12} - Q_{23}$

$A_\Sigma = Q_н - Q_х \Rightarrow A_\Sigma + Q_х = Q_н$

$Q_{12} = C_V \cdot \nu \cdot (T_2 - T_1) =$

$\eta = \frac{A_\Sigma}{Q_н} = \frac{A_\Sigma}{A_\Sigma + Q_х}$

Чистовик

5

2) известно, что $\eta = \frac{\eta_{ид}}{8}$

$$\eta_{ид} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_0}{9T_0} = \frac{8}{9}$$

$$\eta = \frac{8}{8 \cdot 9} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\%$$

Ответ: $\eta = 11{,}1\%$

Чистовик

№5

6

1) $x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

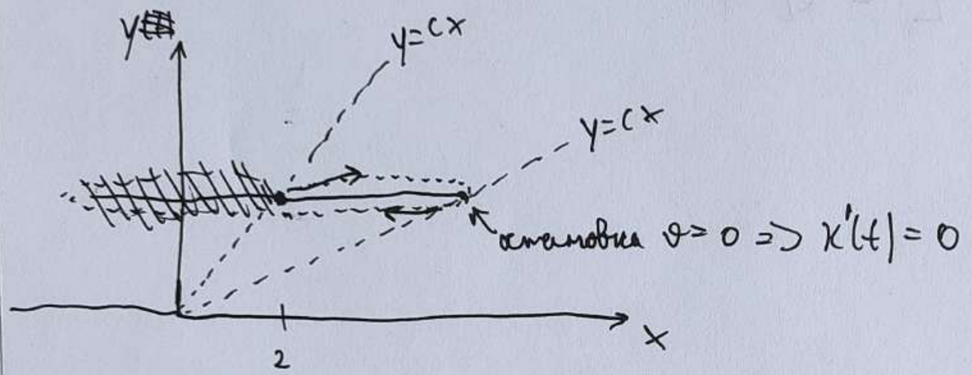
$x(t) = 3 + \sin t(\cos t - 1) - \cos t$

$x(t) = 2 + \sin t(\cos t - 1) - 1(\cos t - 1)$

$x(t) = 2 + (\sin t - 1)(\cos t - 1)$

при $t = 0 \Rightarrow x(0) = 2$ то есть частица пришла в начальное положение

при $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(0) = 2$



$x'(t) = (\sin t - 1)'(\cos t - 1) + (\sin t - 1)(\cos t - 1)'$

$x'(t) = (\sin t)' \cdot (\cos t - 1) + (\sin t - 1)(\cos t)'$

$x'(t) = \cos t(\cos t - 1) - (\sin t - 1)\sin t = 0$

$\cos t(\cos t - 1) = \sin t \cdot (\sin t - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\cos t = \sin t \right. \Rightarrow$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2$

$x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right) = 2 - \left(\overset{-0,5}{\frac{2}{4} - 1}\right) = 2,5$

$x \in \left[2;\ 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2\right]$

черновик

7

2) $y(t)=1 \Rightarrow 1=Cx \Rightarrow C=\frac{1}{x(t)}$

$$\frac{1}{2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2} \le C \le \frac{1}{2}$$

приблизительно: $C\in[0{,}2;\ 0{,}5]$

Ответ: $C \in \left[\frac{1}{2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2};\ 0{,}5\right]$

Чистовик

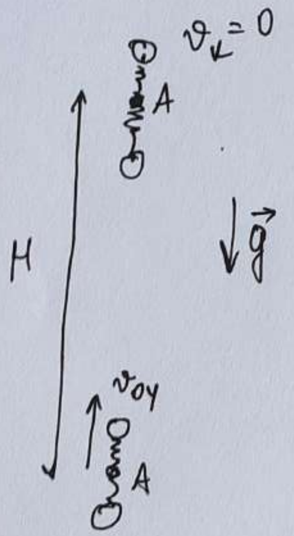
8

№6

На систему тел „M+m" действует внешняя сила $2m\vec{g}$ => по т. о движении центра масс

Найдём на ~~один~~ какую высоту сместится центр масс. ($\vec{a} = \vec{g}$

~~Мы~~ Так получилось, что центр масс всегда совпадает с центром пружины. т.к. $M_1 = M_2 = M$



т.к нас интересует ~~...~~ высота смещения центра масс, то всё что происходит с системой относительно оси x неважно.

Найдём скорость ~~...~~ ц. м. вначале:

$$\vec{v}_0 = \frac{m\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cdot m}{2m} \Rightarrow v_{0y} = \frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}$$

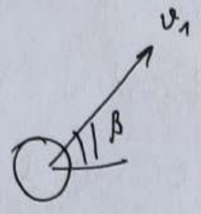
т.к $H = H_{max}$ => $v_k = 0$.

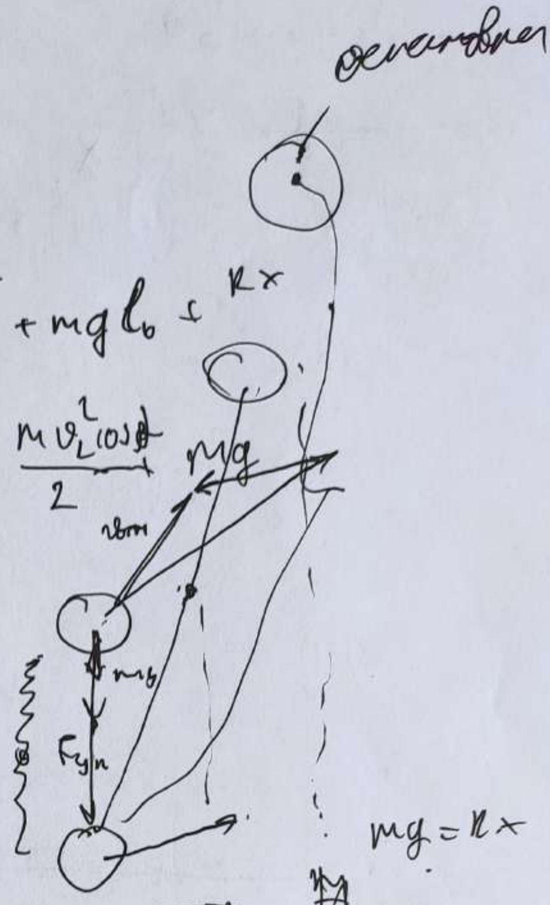
$$H = \frac{(v_{0y})^2}{2g} = \frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{8g}$$

Ответ: $H = \frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{8g}$.

Черновик

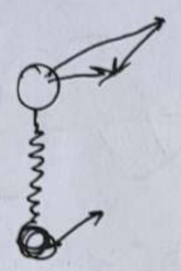
9

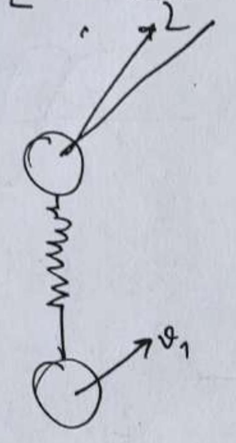




$$E_0 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + mgl_0 + kx$$

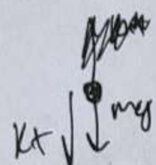
$$E = \frac{mv_1^2\cos\beta}{2} + \frac{mv_2^2\cos\beta}{2}$$

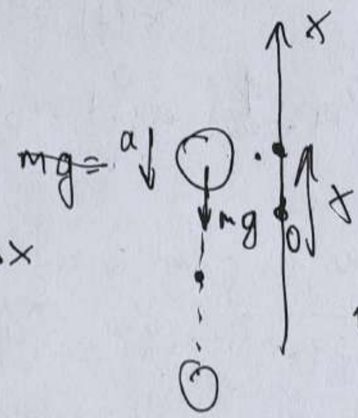




$mg = kx$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{l_0}{g}}$





$x = l_0 + y$

$mg = k\Delta x$

$ma_x = -mg - k(x + l_0)$

$ma_x = +mg - kx +$

$A =$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$;

$l_0 + A = l_0 +$

$x = A\cdot(1+\cos\omega t)$