МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Ким Диана Львовна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ким Диана Львовна

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	5 баллов	85 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик . Вариант 221

№1

$t = 15\,с.$

$v = \cancel{1}\,100\,\frac{км}{ч} = \frac{10^5}{3600}\,\frac{м}{с} = \frac{1000}{36}\,\frac{м}{с}$

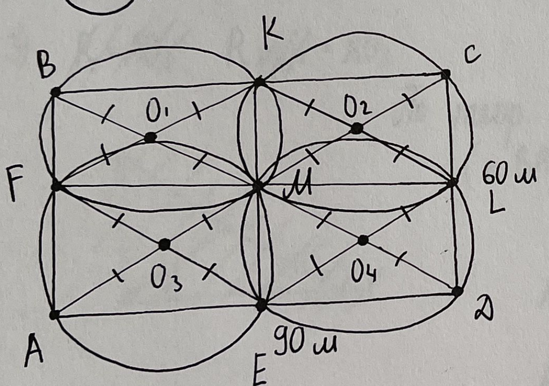
$S = \frac{v_0 + v}{2}\cdot t$

$v_0 = 0\,\frac{м}{с}$, т.к. самолет стоит в начале движения (разбегается)

$S = \frac{vt}{2} = \frac{\cancel{1000}^{\cancel{250}\,125}}{\cancel{36}_{\cancel{12}\,3}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{2}} = \frac{625}{3} = 208\frac{1}{3}\,(м) \approx 208\,м$

Ответ: 208 м

№2.



4 прожектора

h_{min} - ?

Т.к. $h = R$, то $h_{min} = R_{min}$.

1) Разделим поле на 4 равных прямоугольника, как на рисунке. Установим прожекторы в точках пересечения их диагоналей (~~н~~ т. O_1, O_2, O_3, O_4) на высоте, равной половине диагонали ($= AO_3$)

* $AO_3 = MO_3$ ~~как~~ по св-ву диаг. прямоуг.

$FO_3 = O_3E$

Т.к. $FE = AM$ (по св-ву диаг. прямоуг.) => $AO_3 = MO_3 = FO_3 = EO_3$

Прямоуг. равные => все диагонали равны как соотв. элем => => ~~их~~ отрезки, на которые диагонали делятся точкой пересечения, равны.

Чистовик. Вариант 221.

2) Докажем, что это наименьший возможный радиус, при котором будет освещаться все точки.

Если $R < AO_3$

$2R < AM$, то один прожектор ~~может осветить либо точку~~ ~~не~~ может освещать одновременно ~~2 только одну точку~~

не более 1 точки из A, M, D, B, C.

Значит, прожектора смогут одновременно осветить не более 4 точек из A, M, B, D, C, т.е. при $R < AO_3$ 4 прожектора не смогут осветить всё поле.

3) ~~$R = AO_3$~~ $R_{\cancel{min}} = AO_3$

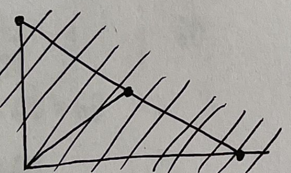
По теор. Пифагора: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

($\triangle BAD$ – п/у)

$3600 + 8100 = BD^2$

$100 \cdot 117 = BD^2$

$BD = 10\sqrt{117} = 10 \cdot 3\sqrt{13}$



$AO_3 = \frac{BD}{4}$

$AO_3 = \frac{10 \cdot 3\sqrt{13}}{4} = \frac{15\sqrt{13}}{2} = \sqrt{\frac{225 \cdot 13}{4}} = \sqrt{731\frac{1}{4}}$ м

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 13 \\ \hline 675 \\ 225 \\ \hline 2925 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2925\ |\ 4 \\ -28 \quad |\ 731 \\ \ \ 12 \\ \ \ \ \ 5 \\ \ \ -4 \\ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

$27 < \sqrt{731\frac{1}{4}} < 28$

$27 < \sqrt{731{,}25} < 27{,}1$

$$\begin{array}{r} 27{,}3 \\ \times\ 27{,}3 \\ \hline 819 \\ 1911 \\ 546 \\ \hline 745{,}29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{25}\ 26 \\ \times\ 26 \\ \hline 156 \\ +\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ 27 \\ \hline 189 \\ +\ 54 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 224 \\ +\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

Значит, $R_{min} = 27{,}1$ м, =>

=> $h_{min} = 27{,}1$ м

$$\begin{array}{r} 27{,}2 \\ \times\ 27{,}2 \\ \hline 544 \\ 1904 \\ 544 \\ \hline 739{,}84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27{,}1 \\ \times\ 27{,}1 \\ \hline 271 \\ 1897 \\ 542 \\ \hline 734{,}41 \end{array}$$

Ответ: 27,1 м.

Чистовик. Вариант 221

№3

~~Пусть n – заряд смартфона, полностью заряженного.~~

~~t – общее время.~~

	A (работа)		v	t (ч.)
I	$\frac{nt}{6}$ ~~n~~	n	$\cancel{\frac{n}{3}}$ $\frac{n}{3}$	$\frac{1}{2}t$
II	$\frac{nt}{10}$ ~~n~~		$\frac{n}{5}$	$\frac{1}{2}t$

$\cancel{\frac{1}{2}t}$ $\cancel{\frac{nt}{6}+\frac{nt}{10}=n}$

	A		v	t (ч.)
игры	$\frac{t}{10}$	$=1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}t$
видео	$\frac{t}{6}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}t$

t – общее время пути.

1) $\frac{t}{6}+\frac{t}{10}=1 \quad \Big| \cdot 60$

$10t+6t=60$

$16t=60$

$t=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}$ (ч.)

	S (км)	v (км/ч)	t (ч.)
I			
II			

$v_{ср_1}=\frac{S_1}{t_1}=\frac{\frac{1}{2}S}{t_1}$, $\quad v_{ср_2}=\frac{S_2}{t_2}=\frac{\frac{1}{2}S}{t_2}$; ~~$S$ –~~ S – весь путь

$\frac{\frac{1}{2}S}{v_{ср_1}}+\frac{\frac{1}{2}S}{v_{ср_2}}=t$

$\frac{\frac{1}{2}S}{80}+\frac{\frac{1}{2}S}{60}=\frac{15}{4} \quad \Big| \cdot 480$

Чистовик. Вариант 221

$3S + 4S = 15 \cdot 120$

$7S = 1800$

$S = \frac{1800}{7} = 257\frac{1}{7}$ (км) ≈ 257 км

$$\begin{array}{r|l} 1800 & 7 \\ \underline{14} & 257 \\ 40 & \\ \underline{35} & \\ 50 & \\ \underline{49} & \\ 1 & \end{array}$$

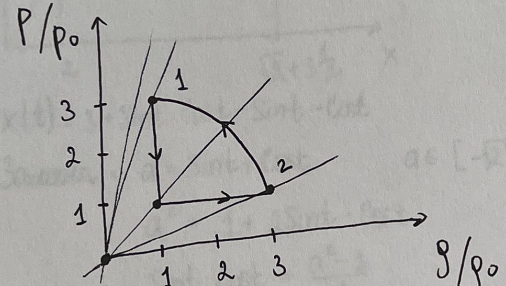
Ответ: 257 км.

№4

$\eta_{max} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$

$\eta - ?$ $\quad \eta = \frac{\eta_{max}}{8}$

$p = \frac{\rho}{M} RT$, т.к. $m = const$.



1) $V = const$ $\quad 3p_0 \to p_0$

$\Downarrow$ $\quad\quad\quad \Downarrow$

$\rho = const$ $\quad \frac{p}{p_0} = 3 \to \frac{p}{p_0} = 1$

2) $p = const$ $\quad \rho_0 \to 3\rho_0$

$\Downarrow$

$\frac{\rho}{\rho_0} = 1$ ~~///~~ $\to \frac{\rho}{\rho_0} = 3$

1) Пусть $a = \cancel{\frac{RT}{M}} \cdot \frac{RT\rho_0}{Mp_0}$

Т.к. $\frac{R\rho_0}{Mp_0} = const$ => Чем больше a, тем больше T (a прямо пропорционально T)

$\cancel{p = a\rho}$ $\cancel{p_0}$ $\frac{p}{p_0} = a \cdot \frac{\rho}{\rho_0}$ — прямая, проходящая через точку координат.

~~a max =~~ ~~a = max~~ a — наиб. ~~max~~, когда прямая проходит через точку 1. => T наиб. в состоянии 1

a наим., когда прямая проходит через точку 2. => => T наим. в состоянии 2

~~a max~~ ~~$T = \frac{pM}{\rho R}$~~ 2) $T_{max} = \frac{p_1 M}{\rho_1 R} = \frac{3p_0 M}{\rho_0 R}$

$T_{min} = \frac{p_2 M}{\rho_2 R} = \frac{p_0 M}{3\rho_0 R}$

$\eta_{max} = 1 - \frac{p_0 M}{3\rho_0 R} \cdot \frac{\rho_0 R}{3p_0 M} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ => $\eta = \frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Чистовик. Вариант 221.

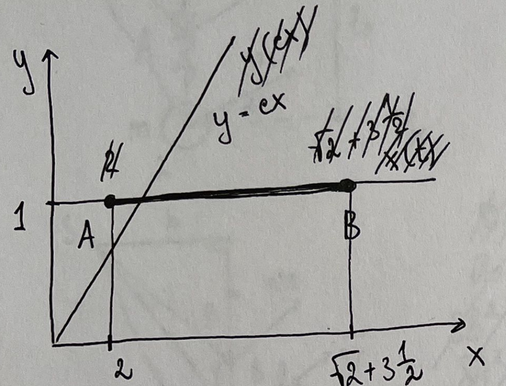
№5.

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$ $\qquad y(t) = 1$

$y = cx$, $c > 0$

c – некоторое число.

$c - ?$



1) Чтобы частица осветилась, ~~она должна~~ луч должен попасть на её путь, т.е.

~~Sint и Cost – периодические функции. Значит траектория движения~~

~~на~~ точка пересечения прямых $y = 1$ и $y = cx$ должна $\in$ ~~$D(x)$~~ области ~~о~~ значений функции $x(t)$.

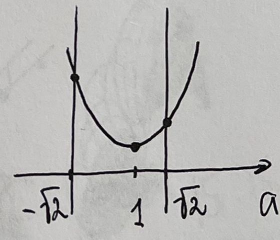
2) $x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

Замена: $a = \sin t + \cos t$ $\qquad a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$a^2 = 1 + 2\sin t \cdot \cos t$

$\sin t \cdot \cos t = \frac{a^2 - 1}{2}$

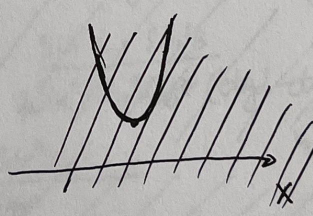
$$x(a) = 3 + \frac{a^2-1}{2} - a = \frac{a^2 - 1 + 6 - 2a}{2} = \frac{a^2 - 2a + 5}{2} = \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{5}{2}$$



$a_в = \cancel{x_в} = \frac{1}{1} = 1$

$x_в = \cancel{y_в} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{2} = 2$

$x(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \sqrt{2} + \frac{5}{2} = \sqrt{2} + 3\frac{1}{2}$



~~$D(x) =$~~ $E(x) = [2; \sqrt{2} + 3\frac{1}{2}]$

3) $A(2; 1)$: $\qquad 1 = 2c$

$c = \frac{1}{2}$

$B(\sqrt{2} + 3\frac{1}{2}; 1)$: $\qquad 1 = (\sqrt{2} + 3\frac{1}{2})c$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2} + 3\frac{1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2} + 7}$$

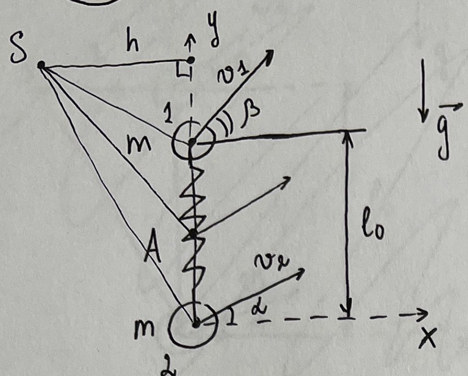
$c \in \left[\frac{2}{2\sqrt{2}+7}; \frac{1}{2}\right]$

Ответ: $\left[\frac{2}{2\sqrt{2}+7}; \frac{1}{2}\right]$.

~~Чистовик~~. Вариант 221.

Черновик.

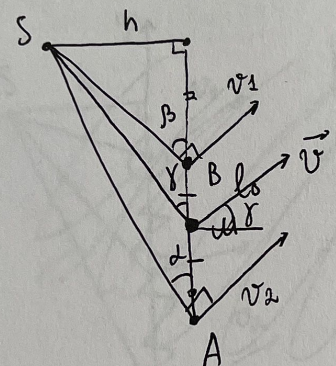
N6



Т.к. $m_1=m_2=m$ => A – центр масс.

~~$\vec{v_A} = \vec{v_1}+\vec{v_2}$~~

~~h – перпендикуляр к оси Y из точки S.~~



~~v_1~~

По теор. косинусов:

$SB^2 = BM^2+SM^2+2BM\cdot SM\cdot\cos\gamma$

$SA^2 = SM^2+AM^2-2AM\cdot SM\cdot\cos\gamma$

$SB^2-SA^2 = 4BM\cdot SM\cdot\cos\gamma$

$\frac{h^2}{\sin^2\beta}-\frac{h^2}{\sin^2\alpha} = 4\cdot\left(\frac{h\cdot ctg\alpha - h\cdot tg\beta}{2}\right) \cdot \frac{h\cdot ctg\alpha-h\cdot ctg\beta}{2}\cdot\frac{h}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma$

$\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\sin^2\alpha} = 2(ctg\alpha-ctg\beta)ctg\gamma$

$ctg\gamma = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{2\sin^2\beta\sin^2\alpha(ctg\alpha-ctg\beta)} = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{2\sin\beta\sin\alpha(\cos\alpha\cdot\sin\beta-\cos\beta\cdot\sin\alpha)}$

$H_{max} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{(v\cdot\sin\gamma)^2}{2g}$

$v_1\cdot\frac{h}{\sin\beta} = v_2\cdot\frac{h}{...} \quad v\cdot\frac{h}{\sin\gamma}$

$\frac{v_1}{\sin\beta}=\frac{v}{\sin\gamma}$

Аналогично, $\frac{v_2}{\sin\gamma}=\frac{v}{\sin\gamma}$

1) $v = \frac{v_1\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = v_2$

2) $v =$

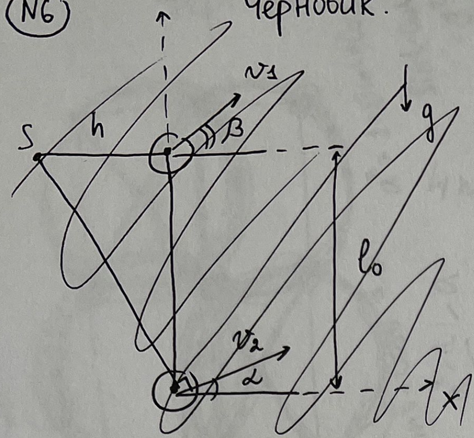
15:15

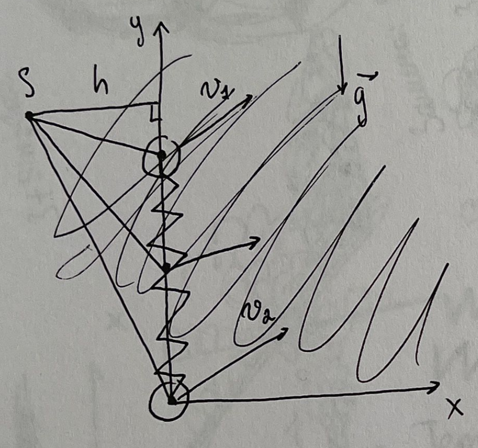
15:21

~~Чистовик~~. Вариант 221.

N6

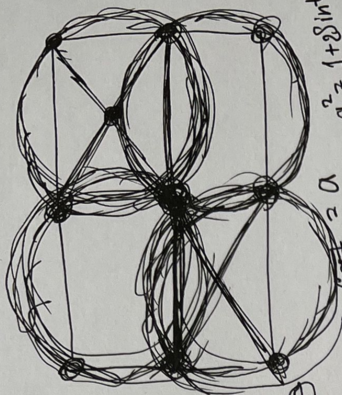
Черновик.





Т.к. $m_1 = m_2 = m$ =>
A – центр пружины
=> A – центр масс

Черновик



$a^2 = 1 + 2\sin t \cos t$

$\sin t \cdot \cos t \cdot \frac{a^2-1}{a}$

4 прог.

$\frac{a^2 - 2a - 1 + 6}{2}$

Замена: $\sin t + \cos t = a$

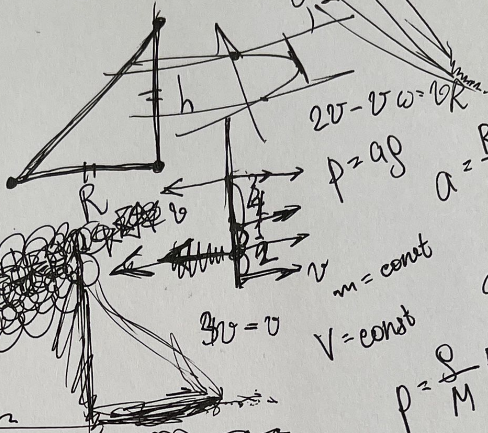
$3 + \frac{a^2-1}{a} - a$

$3 + \sin t \cos t - \sin t - \cos t$

hmin - ?

h :

15 : 15



$2v - v\omega = vk$

$p = ag$

$a = \frac{RT}{M}$

m = const

$a\uparrow \Rightarrow T\uparrow$

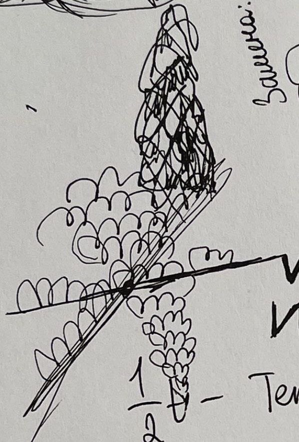
$3v = v$

V = const

$p = \frac{S}{M} RT$

$y(t) \cdot 1$

x



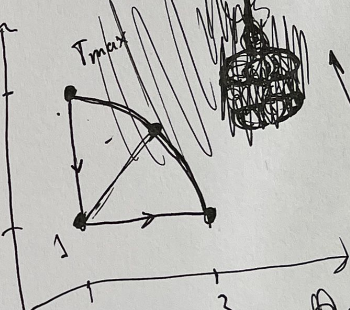
W

WITCH

$\frac{1}{2}t$ - Temp.

$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}$ мульт.

$f(p_0)$



$\frac{mv^2}{2} = mgh$

$H = \frac{2v_y^2}{2g} = \frac{v_1 \cdot \sin\beta}{2g}$

$v_{разр.} = \frac{1}{3}$ ч.

$v_{разр.} = \frac{1}{5}$ ч.

$v \cdot \sin\gamma$

$v_{бр.}$ $\frac{1}{2}S$

$1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}t + \frac{1}{10}t$

$| \cdot 30$

$\frac{v_1 \cdot h \cdot \sin\beta}{v \cdot h \cdot \sin\gamma} = \frac{v_1}{v} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\frac{30}{8} = \frac{\frac{1}{2}S}{80} + \frac{\frac{1}{2}S}{80}$ $| \cdot 80$

$30 = 5t + 3t$

$t = \frac{30}{8}$

1800 | 7
14 | 257
40
35
50
49
1

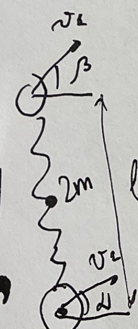
2m

2m

2m

2m

2m



$3S + 4S$

$\frac{v_1}{v} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$2 \cdot 30 \cdot 30$

$S = \frac{1800}{7} = 157\frac{1}{7}$

$v =$

$\frac{v_2}{v} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

$v_1 \frac{W_1}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\gamma}$

$v = \frac{2m}{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}} \cdot v_2$

$v_2 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$