МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Киреев Максим Олегович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Киреев Максим Олегович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	20 баллов	0 баллов	75 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик ②

№2-продолжение

Тогда каждая вершина принадлежит какому-то одному ~~круга~~ кругу. Одному из этих кругов должна принадлежать и точка O. Значит, внутри этого круга лежит отрезок, равный $15\sqrt{13}$ м (AO или OB...). Тогда радиус этого круга $\geq \frac{15\sqrt{13}}{2}$ м.

$3{,}6 \cdot 3{,}6 = 12{,}96$ $\quad 3{,}7 \cdot 3{,}7 = 13{,}69$ $\quad 3{,}61 \cdot 3{,}61 = 13{,}0321$

$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$

$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}61$

$54 < 15\sqrt{13} < 54{,}15$

$27 < \frac{15\sqrt{13}}{2} < 27{,}075 \Rightarrow r_{min} = 27{,}1$ (м)

Ответ: 27,1 м

№3

- x - половина времени (в часах) в пути. За час просмотра мультиков разряжается $\frac{1}{3}$ батареи, а за час Тетриса - $\frac{1}{5}$ батареи.

$x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{5} = 1 \quad | \cdot 15$

$3x + 5x = 15$

$x = \frac{15}{8}$ (ч)

- Пусть t_1 - время, за которое была пройдена первая половина пути, а t_2 - вторая половина пути. S - ~~длина пути~~ половина длины пути

$t_1 + t_2 = 2x$

$\frac{S}{80} + \frac{S}{60} = 2x = \frac{15}{4} \quad | \cdot 4$

$\frac{S}{20} + \frac{S}{15} = 15 \quad | \cdot 5$

$\frac{S}{3} + \frac{S}{4} = 75 \quad | \cdot 12$

$3S + 4S = 750 + 150 = 900$

$S = \frac{900}{7}$ (км)

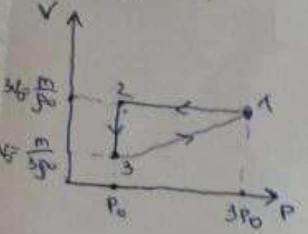
$2S = \frac{1800}{7}$ (км) $= 200 + \frac{400}{7}$ (км) $= 250 + \frac{50}{7}$ (км) $\approx 257 + \frac{1}{7}$ (км) ≈ 257 (км)

Ответ: 257 км.

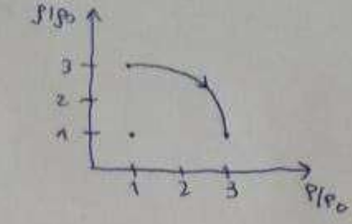
Чистовик ③

№4

В осях PV:



Последняя часть (возвращение) в осях $\frac{P}{P_0}, \frac{\rho}{\rho_0}$:



$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2=4$$
при $1\le\frac{P}{P_0}\le 3$; $1\le\frac{\rho}{\rho_0}\le 3$

$pV=\nu RT$ (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$T=\frac{pV}{\nu R}=\frac{P\cdot\frac{m}{\rho}}{\frac{m}{M}R}=\frac{P}{\rho}\cdot\underbrace{\frac{M}{R}}_{\text{константа}}=\text{const}\cdot\frac{P}{\rho}$$ (m-масса, M-молярная масса)

$T_{max}=\frac{3P_0}{\rho_0}\cdot\text{const}$ ← достигается в точке 1

= из графиков сделать эти значения больше/меньше - нельзя, т.к. $P_0\le P\le 3P_0$; $\rho_0\le\rho\le3\rho_0$

$T_{min}=\frac{P_0}{3\rho_0}\cdot\text{const}$ ← достигается в точке 3

$$\eta_{max}=\frac{T_{max}-T_{min}}{T_{max}}=1-\frac{T_{min}}{T_{max}}=1-\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{8}{9}$$
↑ по формуле Карно

$$\eta=\frac{\eta_{max}}{8}=\frac{1}{9}$$ Ответ: $\frac{1}{9}$.

№5

$$x(t)=3+\sin t\cdot\cos t-\sin t-\cos t$$

| $(\sin t+\cos t)^2=1+2\sin t\cdot\cos t$
$\sin t\cos t=\frac{(\sin t+\cos t)^2}{2}-\frac{1}{2}$

$$x(t)=3+\frac{(\sin t+\cos t)^2}{2}-\frac{1}{2}-(\sin t+\cos t)$$

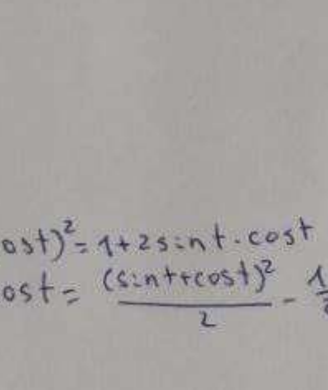
Пусть $\sin t+\cos t=a$

$X(a)=\frac{a^2}{2}-a+\frac{5}{2}$ - квадратичная функция от a.

$a_{верш}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2}=1$; $X_{верш.}=\frac{1}{2}-1+\frac{5}{2}=2$

$D=1-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4=-4<0$; оси направлены вверх (т.к. коэф. при a^2 больше нуля)

• Какие значения может принимать a? $\sin t+\cos t=a$ - набор параллельных прямых, с углом наклона 135° в осях $\cos t, \sin t$.



$a_{max}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ → $\boxed{a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}$

$a_{min}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

Чистовик (1) Вариант 221

№1

Дано:
$t = 15с$
$v_0 = 0 км/ч$
$v_к = 100 км/ч$

$S - ?$

$v_к = 100 км/ч = \frac{100 \cdot 1000}{3600} м/с = \frac{1000}{36} м/с = \frac{250}{9} м/с$; $v_к - v_0 = at$

$v_к = at$ (т.к. $v_0 = 0$)

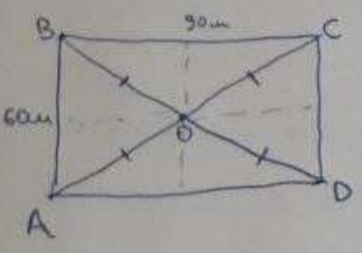
$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{v_к \cdot t}{2}$

равноускор. движение

$$S = \frac{\frac{250}{9} \cdot 15}{2} = \frac{125 \cdot 5}{3} = \frac{625}{3} (м) \approx 208 + \frac{1}{3} (м) \approx 208 (м)$$

Ответ: 208 м.

№2



По св-ву параллелограмма: $BO = OD$, $AO = OC$ $\Rightarrow BO = OD = AO = OC$

По св-ву прямоугольника: $AC = BD$

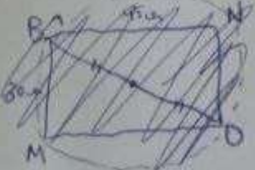
По теореме Пифагора в $\triangle ABC$:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{60^2 + 90^2} = 30\sqrt{4+9} = 30\sqrt{13} (м)$

$AO = OC = BO = OD = 15\sqrt{13} (м)$

Необходимо найти минимальный радиус, при котором прямоугольник ABCD можно будет заполнить четырьмя кругами.

• Пример: $r = \frac{15\sqrt{13}}{2} (м)$. Четыре круга построены на отрезках AO, BO, CO и DO, как на диаметрах. Покажем, что тогда все точки прямоугольника покрыты.

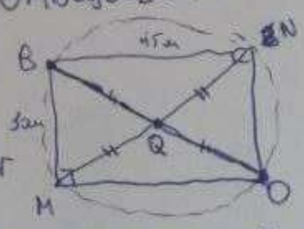


Пусть M - сер. AB, N - сер. BC. $\angle OMB = 90° = \angle ONB$

Медиана в п/у $\triangle$-е равна половине гипотенузы

$\Downarrow$

$MQ = NQ = BQ = QO = r$



Окружность проходит через точки M, и N, ONBM - вписанный.

BNOM - полностью покрыт одним кругом, аналогично можно показать для трех других маленьких прямоугольников.

• Оценка: Если две вершины ABCD принадлежат одному кругу, то либо его радиус $> \frac{15\sqrt{13}}{2}$ м, либо ~~его~~ он практически наполовину лежит вне прямоугольника; поэтому этот случай можно не рассматривать.

Черновик 5 В221

№1

$v_к = 100$ км/ч $= \frac{100\cdot 1000}{3600}$ м/с $= \frac{1000}{36}$ м/с $= \frac{250}{9}$ м/с

$v_к - v_0 = at$

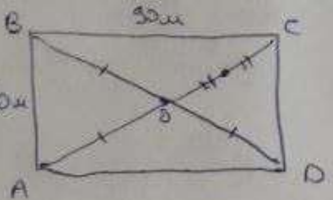
$\frac{250}{9} = 15\cdot a \Rightarrow a = \frac{250}{9\cdot 15} = \frac{50}{27}$ (м/с²)

$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{v_к \cdot t}{2} = \frac{\frac{250}{9}\cdot 15}{2} = \frac{125\cdot 5}{3} = \frac{625}{3}$ (м) ≈ 208 (м)

$624 = 3\cdot 208$

$3{,}6\cdot 15 = 36 + 18 = 54$

№2



$\sqrt{90^2+60^2} = 10\sqrt{81+36} = 30\sqrt{9+4} = 30\sqrt{13}$

$OC = 15\sqrt{13} = d$

$r = \frac{15\sqrt{13}}{2}$

$210 + 49 = 259$

$3{,}7 \cdot 3{,}7$: 259, 111, 1369

$3{,}6\cdot 3{,}6$: 216, 108, 1296

$1800 + 366 = 2166$

$3{,}61\cdot 3{,}61$: 361, 2166, 1083, $13{,}0321$

$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$

$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}61$

$54 < 15\sqrt{13} < 54{,}15$

$27 < \frac{15\sqrt{13}}{2} < 27{,}075$

27,1 м

№3

$x\cdot\frac{1}{3} + x\cdot\frac{1}{5} = 1$

$3x + 5x = 15$

$x = \frac{15}{8}$

$\frac{S}{60} + \frac{S}{80} = \frac{15}{4}$

$\frac{S}{15} + \frac{S}{20} = 15$

$\frac{S}{3} + \frac{S}{4} = 75$

$7S = 75\cdot 12 = 900$

$S = \frac{900}{7}$ (км) $= 128\frac{4}{7}$ (км) ≈ 129 (км)

$750 + 150 = 900$

$910 : 7$

$903 : 7$

$700 + 140 + 56 = 896$

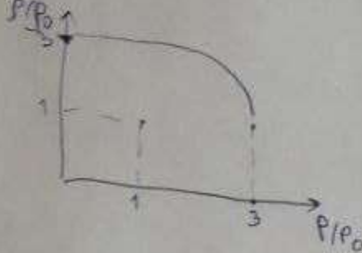
№5

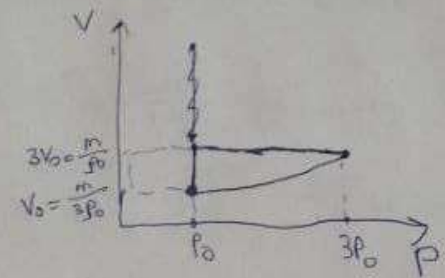
$x(t) = 3 + \sin t\cdot\cos t - \sin t - \cos t = \sin t(\cos t - 1) - (\cos t - 1) + 2 = (\cos t - 1)(\sin t - 1) + 2$

$y = Cx$ $\quad C(3 + \sin t\cdot \cos t - \sin t - \cos t) = 1$

Черновик (6)

$n = \frac{N}{V}$





$pV = \nu RT$

$\nu = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$

$= \frac{\rho \cdot \frac{N}{n}}{M} = \frac{\rho N}{M \cdot \frac{}{\rho N_a}} =$

$= \frac{\rho^2 \cdot N \cdot N_a}{M^2}$

$D_{max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$

$3P_0$

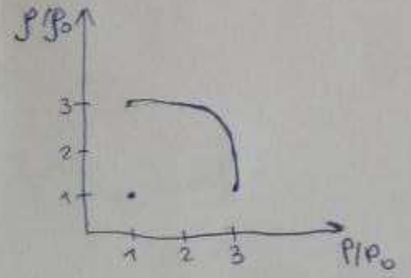
$M = \frac{m}{\nu} = \frac{m}{\frac{N}{N_a}} = \frac{mN_a}{N}$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\nu M}{nN} =$

$= \frac{\frac{N}{N_a} M}{nN} = \frac{M}{N_a n}$

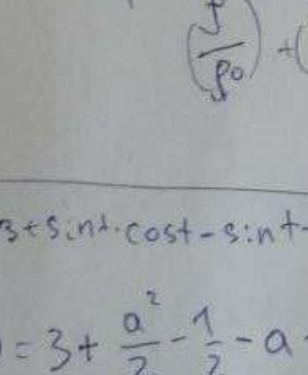
$\rho N_a n = M$

$\rho n = \frac{M}{N_a} = const$



$a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n = \frac{M}{\rho N_a}$



$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{P\frac{m}{\rho}}{\nu R} = \frac{P}{\rho} \cdot MR$

$T_{max} = \frac{3P_0}{\rho_0} MR$

$\frac{m}{\nu} = M$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 = 4$ при $1 \leq \frac{P}{P_0} \leq 3$

$1 \leq \frac{\rho}{\rho_0} \leq 3$

$T_{min} = \frac{P_0}{3\rho_0} MR$

$\frac{1}{3}$

$\frac{a}{2} = \frac{\sin t + \cos t}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a \leq \sqrt{2}$

Тогда $D_{max} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$D = \frac{1}{9}$

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$a = \sin t + \cos t$

$x(a) = 3 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a =$

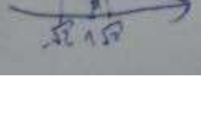
$= \frac{a^2}{2} - a + \frac{5}{2}$

$D < 0$

$(\sin t + \cos t)^2 = 1 + 2\sin t \cdot \cos t$

$x_B = 2$

$a_B = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2} = 1$



$\sin t \cos t = \frac{(\sin t + \cos t)^2}{2} - \frac{1}{2}$

Черновик 7

$x(a)=\frac{a^2}{2}-a+\frac{5}{2}$ $\quad E(x)=[x(1);x(-\sqrt{2})]=[2;1+\sqrt{2}+\frac{5}{2}]=\underline{[2;\frac{7}{2}+\sqrt{2}]}$

$cx=1;\ x\in[2;\frac{7}{2}+\sqrt{2}]$

$\cancel{2c<\frac{7}{2}c+\sqrt{2}}$

$cx\in[2c;(\frac{7}{2}+\sqrt{2})c]$

$x=\frac{1}{c}$ $\quad \frac{1}{c}\in[2;\frac{7}{2}+\sqrt{2}]$

$c\in\left[\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right]=$

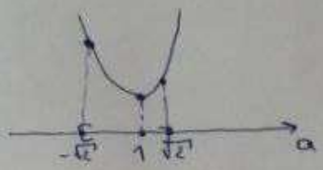
$=\left[\frac{2}{7+2\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right]=$

$=\left[\frac{2(7-2\sqrt{2})}{49-8};\frac{1}{2}\right]=$

$=\left[\frac{14-4\sqrt{2}}{41};\frac{1}{2}\right]$

Чистовик (4)

№5-продолжение



← т.к. $D<0$, оси вверх

$x(a)=\frac{a^2}{2}-a+\frac{5}{2}$, $a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

$E(x)=[x(1);\ x(-\sqrt{2})]$ – область значений функции

$E(x)=[2;\ 1+\sqrt{2}+\frac{5}{2}]=[2;\ \frac{7+2\sqrt{2}}{2}]$

$\begin{cases} Cx=y=1 & \to \text{т.к. } y(7)=1 \\ x\in[2;\ \frac{7+2\sqrt{2}}{2}] \end{cases}$

$x=\frac{1}{C}\in[2;\ \frac{7+2\sqrt{2}}{2}]$

$C\in[\frac{2}{7+2\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}]$

т.к. $C>0$

$C\in[\frac{2(7-2\sqrt{2})}{49-8};\ \frac{1}{2}]$; $\boxed{C\in[\frac{14-4\sqrt{2}}{41};\ \frac{1}{2}]}$

Проверка

$14 \overset{>}{\vee} 4\sqrt{2}$ $\Rightarrow \frac{14-4\sqrt{2}}{41}>0$, $C>0$

$7 \overset{>}{\vee} 2\sqrt{2}$

$49 \overset{>}{\vee} 8$

Ответ: $[\frac{14-4\sqrt{2}}{41};\ \frac{1}{2}]$