



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**

ФИО участника олимпиады: **Мамченко Дмитрий Алексеевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломоносов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мамченко Дмитрий Алексеевич

Класс: 10-11

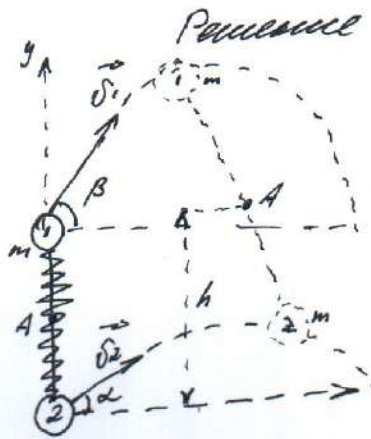
Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
5 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	85 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

N6

Demo:

- $V_1 =$
- β
- α
- V_2
- m
- g
- $h = ?$



Yves-Luc
Mars 5

$$\vec{g}$$

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_y = v \sin \alpha$$

$$Ox: v_{2x} = v_2 \cos \alpha$$

$$v_{1x} = v_1 \cos \beta$$

$$Oy: v_{2y} = v_2 \sin \alpha - gt$$

$$v_{1y} = v_1 \sin \beta - gt$$

$$L = v_x t$$

$$L_1 = v_1 \cos \beta t$$

$$L_2 = v_2 \cos \alpha t$$

$$H = v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

$$H_1 = v_{1y} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$H_2 = v_{2y} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = \frac{H_1 - H_2}{2} + H_2 = \frac{H_1 + H_2}{2}$$

$$h = \frac{v_{1y} t + v_{2y} t - gt^2}{2}$$

$$h = h_{max}, \text{ when } t_0 = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2g}$$

$$h = \frac{v_{1y}^2 + 2v_{1y}v_{2y} + v_{2y}^2}{2g} - \frac{v_{1y}^2 + v_{2y}^2 + 2v_{1y}v_{2y}}{4g} =$$

$$= \frac{(v_{1y} + v_{2y})^2}{4g}$$

$$h = \frac{g (v_1 \sin \beta + v_2 \sin \alpha)^2}{4g}$$

$$\text{Or better: } \frac{(v_1 \sin \beta + v_2 \sin \alpha)^2}{4g}$$

N2

Условие
лист 4

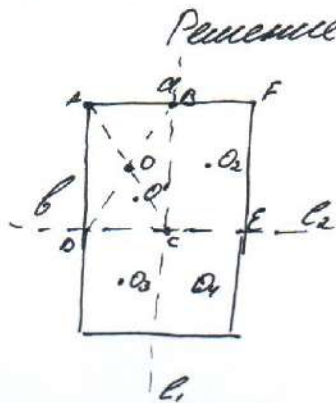
Дано:

$$a = 60 \text{ м}$$

$$b = 90 \text{ м}$$

$$z = h$$

h = ?



прямоугольник имеет симметрию отн.
 L_1 и L_2 .

Если нам нужно было разместить линию над полем $\frac{a}{2}; \frac{b}{2}$, то нужно было бы сделать это в точке пересечения диагоналей, т.е. $AO = OB = OC = OD = R_{\min}$, если поместить линию в точку $O' \in OO$, то $AO' > AO \Rightarrow R > R_{\min}$. Значит линия бы находилась в нижней клетке, а именно для $BFEC$.

Очевидно, что поле размером a, b можно разделить на 4 участка, равных $ABCD$.

При смещении точки O, O_1, O_2, O_3, O_4 от их нач. положений радиус будет расти, значит мин. радиус, т.е. $z = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

$$z = \frac{15\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{13} \approx 3,61$$

$$z \approx 7,5 \cdot 3,61 \approx 27,075 \text{ м}$$

$$\text{Т.к. } z:0,1, \text{ то } z = 27,1 \text{ м}$$

$$h = z = 27,1 \text{ м}$$

Ответ. $h = 27,1 \text{ м}$

№4

Чистовик
мет 3

Дано:

1-2:

$$V = \text{const}$$

$$P_1 = 8P_0$$

2-3:

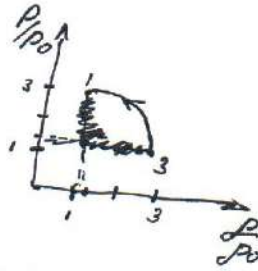
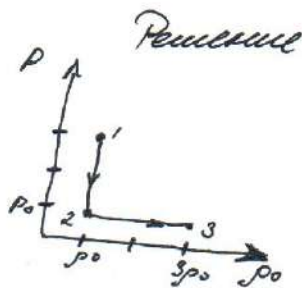
$$P = \text{const}$$

$$P_2 = P_0$$

$$P_3 = 3P_0$$

$$\eta = \frac{1}{8} = \eta_m$$

$\eta = ?$



η_m достигается при изохорном нагреве, т.е.

$$\eta_m = \frac{T_{1k} - T_{1kmin}}{T_{1k}} \cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{1}{8} \eta_m = \frac{T_{1k} - T_{1kmin}}{8 T_{1k}} \cdot 100\%$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT$$

$$\nu = \frac{PV}{RT}$$

$$\Rightarrow P = \frac{PV}{RT}, \text{ тогда}$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_0 &= \frac{P_0 M}{RT_0} \\ P &= \frac{P M}{RT} \end{aligned} \right.$$

$$P = \frac{P M}{RT}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{P_0}{P}$$

$\frac{T}{T_0}$ макс., когда $\frac{P_0}{P}$ макс., $\frac{P_0}{P}$ - макс. По рисунку видно, что это достигается $\frac{P_0}{P} \leq 1$; $\frac{P_0}{P} \leq 3$. Этими условиями соотв. точка 1.

Для T/T_0 мин., нужно, чтобы $\frac{P_0}{P}$ - мин, $\frac{P_0}{P}$ - мин.

$$\frac{P_0}{P} \geq 1; \frac{P_0}{P} \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{T}{T_0} \text{ макс. равно } 3$$

$$\frac{T}{T_0} \text{ мин. равно } \frac{1}{3}$$

$$\text{Тогда } T_{1k} = 3T_0; T_{1kmin} = \frac{1}{3}T_0$$

$$\eta = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\frac{1}{3}T_0}{3T_0} \right) = \frac{1}{8} \cdot 100\% \approx \frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11,1\%$$

Ответ. $\eta = 11,1\%$

N5

Людмила Чистобин

Решение

Дано:

$$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$$

$$y(t) = 1$$

$$y = cx$$

$$c > 0$$

$c = ?$, при которых существуют t ,
это $y = cx$.

$$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$$

$$y(t) = 1$$

$$1 = c(3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t)$$

Пусть $\frac{1}{c} = n$, тогда

$$n = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$$

Найдем область значений n , т.к. $x(t) = n$, то $x'(t) = n'$

$$x'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t$$

$$x'(t) = 0$$

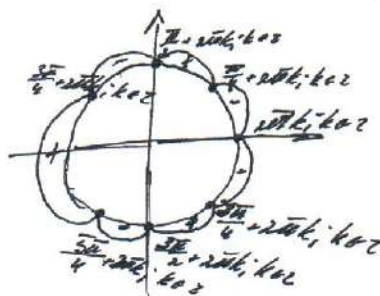
$$\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t = 0$$

$$\cos t (\cos t - 1) (\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}) (\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \cos t = 0 \\ \cos t = 1 \\ \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Проверим найденные значения, получим, что

$$\sup = \frac{5\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\inf = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ тогда}$$

$$x(t)_{\min} = 3 + \sin(2\pi k) \cos(2\pi k) - \sin(2\pi k) - \cos(2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

$$x(t)_{\min} = 2$$

$$x(t)_{\max} = 3 + \sin(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 2\pi k) \cos(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 2\pi k) - \sin(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 2\pi k) - \cos(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

$$x(t)_{\max} = 3, 5 + \sqrt{2}, \text{ тогда}$$

$$n \in [2; 3, 5 + \sqrt{2}]$$

$$2 \leq \frac{1}{c} \leq 3, 5 + \sqrt{2}$$

$$c \in [\frac{1}{3, 5 + \sqrt{2}}; 0, 5]$$

$$\text{Отв. } c \in [\frac{1}{3, 5 + \sqrt{2}}; 0, 5]$$

№1

Дано:

$$t = 15 \text{ с}$$

$$v_0 = 100 \text{ км/ч} = \frac{100}{3.6} \text{ м/с}$$

$$a = \text{const}$$

$$L = ?$$

Решение

Разберем промежуток с момента a , когда

$v_{\text{нач.}} = 0 \text{ м/с}$, значит:

$$v_0 = v_{\text{нач.}} + at = at$$

$$L = v_{\text{нач.}} \cdot t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}$$

Из этих соотнош. можно получить:

$$L = \frac{v_0 t}{2}$$

$$L = \frac{100}{3.6} \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} \approx 208 \text{ м}$$

Ответ. $L = \frac{v_0 t}{2}$; $L = 208 \text{ м}$.

№3

Дано:

S - общая дистанция

$2L$ - весь путь

v_1 - скорость разг. Велос

v_2 - скорость разг. Термос

$$t_1 = 3 \text{ с}$$

$$t_2 = 5 \text{ с}$$

$$v_1 = 80 \text{ км/ч}$$

$$v_2 = 60 \text{ км/ч}$$

$$2L = ?$$

Решение

$$\overbrace{L, v_1, t_1} \quad \overbrace{L, v_2, t_2}$$

$$2L = v_1 t_1 + v_2 t_2$$

T - все время

$$T = \frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}$$

$$\begin{cases} S = v_1 t_1 + \\ S = v_2 t_2 \end{cases}$$

$$S = v_1 t_1 + v_2 t_2$$

$$S = v_1 t_1 + v_2 t_2$$

$$\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} t = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

$$T = 2t$$

$$2L = \frac{4 t_1 t_2 v_1 \cdot v_2}{(t_1 + t_2)(v_1 + v_2)}$$

$$2L = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 60}{8 \cdot 140} = \frac{1800}{7} \approx 257,14 \text{ м} \approx 257 \text{ м}$$

Ответ. $2L = \frac{4 t_1 t_2 v_1 \cdot v_2}{(t_1 + t_2)(v_1 + v_2)}$; $2L = 257 \text{ м}$.

№1 Дано:

Решение

Черновик

$t = 15 \text{ секунды}$
 $v_0 = 100 \text{ км/ч} = \frac{100}{3.6}$
 $a = \text{const}$
 $L = ?$

$$v_0 = 0 + at$$

$$a = \frac{v_0}{t}$$

$$L = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{v_0 t}{2}$$

$$L = \frac{100 \cdot 15}{3.6 \cdot 2} = \frac{100 \cdot 15}{3.6 \cdot 2} = \frac{750}{3.6} = 208.33 \text{ м}$$

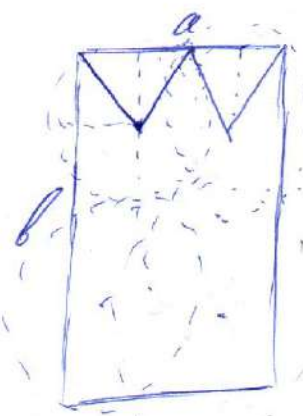
$$\approx 208 \text{ м}$$

Order: 28 м

$$\begin{array}{r} 7500 / 36 \\ \underline{72} \\ 300 \\ \underline{288} \\ 120 \\ \underline{108} \\ 18 \end{array}$$

№2

Дано:
 $a = 60 \text{ м}$
 $b = 30 \text{ м}$

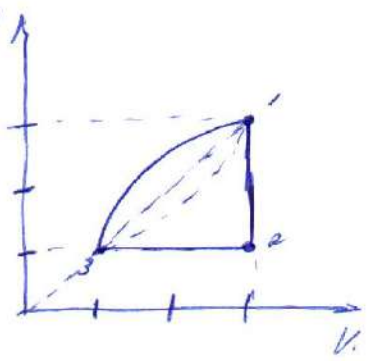


$S = ab$ $\epsilon = 45$

$S = 4$

$$\frac{3p_0 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_2}{T_2}$$

$$3T_2 = T_1$$



$$PV = \nu RT$$

$$PV = \frac{pM}{\mu} RT$$

$$p = \frac{pM}{RT}$$

$$p_0 = \frac{pM}{R T_0}$$

$$3p_0 = \frac{pM}{R \frac{T_0}{3}}$$

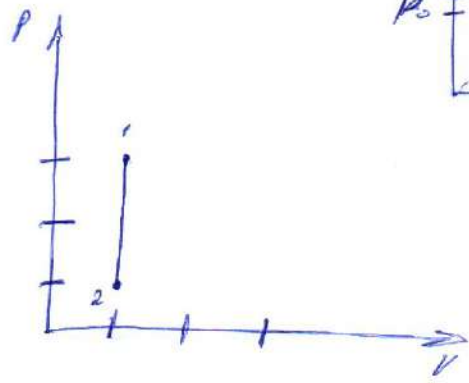
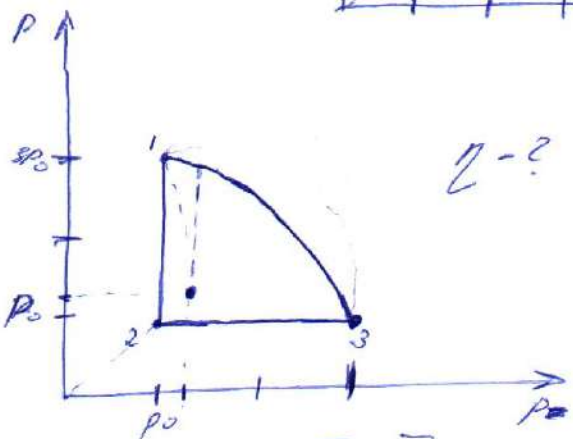
$$p_0 = \frac{3p_0 M}{RT_0}$$

$$p_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}$$

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_0}{T_0/3}$$

$$p = \frac{pM}{RT}$$

$$p_0 + p_0 = R T_0^2$$



$$\eta_{\text{ци}} = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$$

$$\eta = \frac{T_H - T_X}{8T_H}$$

2L-?

$$S = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot 3 ; v_1 = \frac{S}{3}$$

$$S = v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot 5 ; v_2 = \frac{S}{5}$$

$$S = t \cdot v_1 + t \cdot v_2 = t \left(\frac{S}{3} + \frac{S}{5} \right) = \frac{8}{5} t S$$

$$t = \frac{15}{8} \quad \frac{30}{8} = 3,75 \text{ h}$$

$$T = \frac{L}{80} + \frac{L}{60} = \frac{14L}{480}$$

$$\frac{14L}{480} = \frac{15}{8} ; 2L = \frac{60 \cdot 15}{7} = \frac{900}{7} \approx 125,7 \approx 126 \text{ km}$$

$$2t = \frac{L}{80} + \frac{L}{60}$$

$$\frac{30}{8} = \frac{140L}{4800} = \frac{30 \cdot 480}{8 \cdot 7} = 26 ; 257 \text{ m.}$$

$$\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$$

$$T = \left(\frac{v_2 + v_1}{v_2 \cdot v_1} \right) L$$

$$\frac{v_2 + v_1}{v_2 \cdot v_1} L = 2 \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

$$L = \frac{2 t_1 \cdot t_2 \cdot v_1 \cdot v_2}{(t_1 + t_2)(v_2 + v_1)}$$

$$\begin{array}{r} 900/7 \\ -140 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 1 \end{array} \quad 125,7$$

$$\begin{array}{r} 1800/7 \\ -140 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 5 \end{array} \quad 257,1$$

$$\begin{array}{r} 1800/7 \\ -140 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 5 \\ -49 \\ \hline 10 \end{array} \quad 257,1$$

N3

Дано:

Пусть все углы α , $T = \frac{L}{80} + \frac{L}{60} - \frac{140L}{80 \cdot 60} = \frac{14L}{480}$

тогда все враща $T = \frac{L}{80} + \frac{L}{60} = \frac{7L}{240}$

Вся базисная геометрия свалла

Черновик.

~~7L~~ $\frac{7L}{240}$ или

$\frac{7L}{240} \cdot \text{vel}_2$

N4

Дано:

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$y(t) = 1$

$y = cx$

$y = cx$

$\frac{1}{c} = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$u = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

Пусть $f(t) = \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t + 3$

$f'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t = 0$

~~2~~ $2\cos^2 t - \cos t + \sin t - 1 = 0$

$2\cos^2 t - \cos t + \sqrt{1 - \cos^2 t} - 1 = 0$

~~$2s^2 - s + \sqrt{1-s^2} - 1 = 0$~~

$\sqrt{1-s^2} = 1 + s - 2s^2$

$1 - s^2 = 1 + s + 4s^2 + 2s - 4s^2 - 4s^3$

$4s^4 - 4s^3 - 2s^2 + 2s = 0$

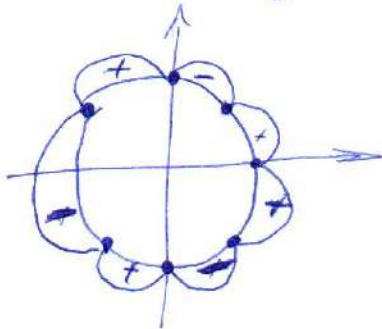
$s(2s^3 - 2s^2 - s + 1) = 0$

$s(s-1)(2s^2-1) = 0$

$\begin{cases} s=0 \\ s=1 \\ s=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} s=0 \\ s=1 \\ s=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\cos t = 0; t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos t = 1; t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}; t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\begin{matrix} 2 & -2 & -1 & +1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}$



№5

$$\sin t (\cos t - 1) - \cos t$$

$$3,5 - \sqrt{2}$$

max =

$$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$$

$$y(t) = 1 \quad (\sin t - 1)(\cos t - 1) + 2$$

$$t = c \quad \frac{1}{c} = 3 + \sin t \cos t - \sin t - \cos t$$

~~the~~

$$x'(t) = -\sin^2 t + \cos^2 t - \cos t + \sin t$$

$$3 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} =$$

$$2\cos^2 t - \cos t + \sin t - 1 = 0$$

$$\sin t = 1 + \cos t - 2\cos^2 t$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 t} = 1 + \cos t - 2\cos^2 t$$



$$\text{Let } \cos t = s$$

$$\sqrt{1 - s^2} = 1 + s - 2s^2$$

$$1 - s^2 = 1 + s^2 + 4s^4 - 4s^3 - 4s^2 + 2s$$

$$4s^4 - 4s^3 - 2s^2 + 2s = 0$$

$$s(2s^3 - 2s^2 - s + 1) = 0$$

$$s(s-1)(s^2-1) = 0$$

$$\frac{1}{c} \in [2; 3,5 + \sqrt{2}]$$

$$2 \leq \frac{1}{c} \leq 3,5 + \sqrt{2}$$

~~2 < c~~

$$2 - \frac{1}{c} \geq 0$$

$$\frac{2c - 1}{c} \leq 0$$

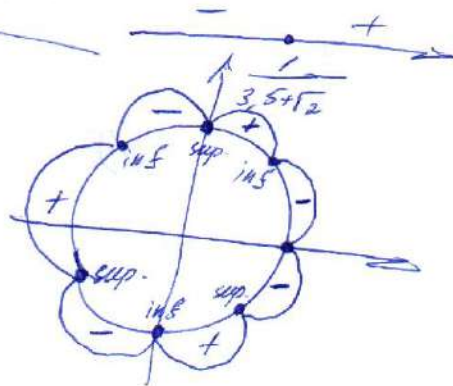
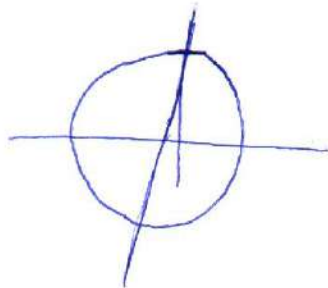
$$\frac{+}{0} \frac{-}{0,5c} \frac{+}{+}$$

set - noj (0,5; 2)

$$3,5 + \sqrt{2} - \frac{1}{c} \leq 0$$

$$\frac{(3,5 + \sqrt{2})c - 1}{c} \leq 0$$

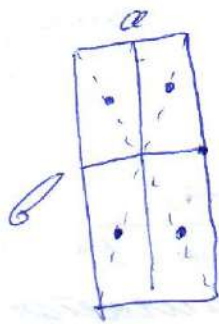
$$c \in \left[\frac{1}{3,5 + \sqrt{2}}; 0,5 \right]$$



$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} =$$

N2

Дано:
 $a = 80 \text{ м}$
 $b = 80 \text{ м}$



$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 361 \\ \hline \end{array}$$

Умножение

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$T = \frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}$$

$$L = \frac{v_2 v_1}{v_2 + v_1}$$

$$L \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = T \quad 2L = \frac{2v_2 v_1}{v_2 + v_1}$$

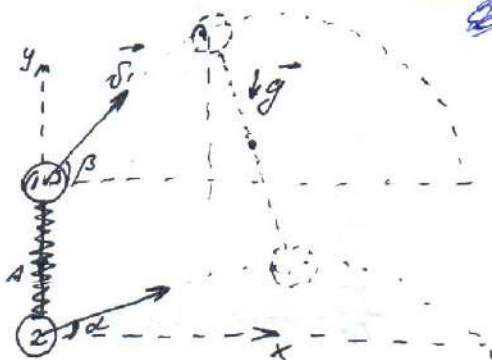
$$L \left(\frac{v_2 + v_1}{v_2 v_1} \right) = T$$

$$7,5 \cdot 15 \cdot 18$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 \cdot 15^2 + 4^2 \cdot 15^2} = \frac{15}{2} \sqrt{36 + 16}$$

$$\frac{7,5 \cdot 3,6}{2} =$$

$$\frac{15}{2} \sqrt{4 \cdot 13} = 15\sqrt{13}$$



$$a = \sqrt{(15 \cdot 4)^2 + (15 \cdot 6)^2} = 3,609$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 361 \\ \hline 2166 \\ 1083 \\ \hline 130321 \end{array} \quad \begin{array}{r} 361 \\ \times 361 \\ \hline 2166 \\ 1083 \\ \hline 130321 \end{array} \quad \sqrt{13} \approx 3,61$$

Оx:

$$L = v_x$$

$$H_1 = H_2$$

$$v_1 \sin \beta - gt - \frac{gt^2}{2} = v_2 \sin \alpha - gt - \frac{gt^2}{2}$$

$$\frac{H_1 - H_2}{2} + H_2 =$$

$$h = h_2$$

$$\frac{H_1 + H_2}{2}$$

$$\frac{-v_2 - v_1}{-2g}$$

$$h_{\text{max}} =$$

$$v_{1y}^2 + v_{1y} v_{2y}$$

№4

Дано:

1-2:

$$V = \text{const}$$

$$P_1 = 3P_0$$

$$P_2 = P_0$$

2-3:

$$P = \text{const}$$

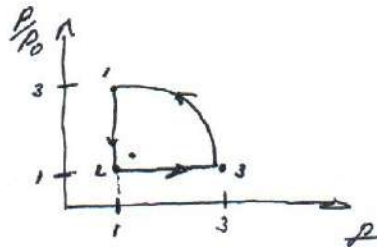
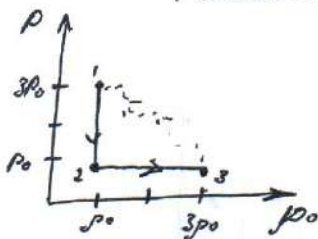
$$P_2 = P_0$$

$$P_3 = 3P_0$$

$$\eta = ? \quad \eta_m$$

$\eta = ?$

Решение



η_m - достигается при изохорном нагреве, т.е.

$$\eta_m = \frac{T_H - T_X}{T_H}$$

$$\eta = \frac{1}{8} \eta_m = \frac{T_H - T_X}{8T_H}$$

Уравнение Менделеева - Клапейрона:

$$\left. \begin{aligned} PV &= \nu RT \\ \nu &= \frac{PM}{RT} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{PM}{RT}$$

Из этого соотнош. можно получить:

$$\frac{T_m \frac{P}{P_0} M}{R T_0} = \frac{P}{P_0}$$

$$\frac{\frac{P}{P_0} M}{R \frac{P}{P_0}} = \frac{T_0}{T_m}$$

$$P_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$$

$$P = \frac{PM}{RT}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{P_0}{P}$$

$$\frac{T}{T_0} - \text{max, когда } 3 \cdot 1 = 3$$

3

1/9