МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Мигалева Виктория Сергеевна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мигалева Виктория Сергеевна

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	100 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик

Задание 1

Дано:
$t = 15c$
$v_k = 100$ км/ч
$v_0 = 0$ м/с
$S - ?$

Решение:

$$a = \frac{v_k - v_0}{t} = \frac{v_k}{t}$$

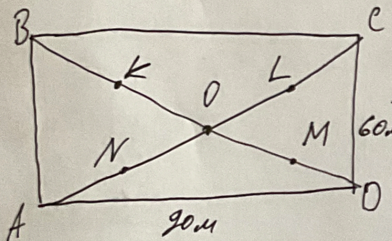
$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v_k \cdot t^2}{2t} = \frac{v_k t}{2}$$

$$S = \frac{100000 \cdot 15}{3600 \cdot 2} \approx 208\text{ м}$$

Ответ: ~~208 м~~ 208 м.

Задание 2

Пусть ABCD - футбольное поле, а точка O - пересечение диагоналей прямоугольника ABCD.



BO = CO = OD = OA, т.к. в прямоугольнике диагонали равны

Разместим прожекторы в точках K, L, M, N, причём

BK = KO = OL = LC = DM = MO = ON = AN

Тогда прожектор освещает круг радиусом = четверть диагонали

$h = r$ по условию $\Rightarrow h = \frac{\sqrt{90^2 + 60^2}}{4} \approx 27{,}1$ м.

Ответ: 27,1 м

Следует доказать, что именно такое расположение прожекторов наиболее подходящее. ~~То~~ Докажем, исходя из принципа ~~Дирихле~~ Дирихле.

Т.к. расстояние между ~~=~~ любыми из точек A, B, C, D, O не меньше половины диагонали, ~~то~~ и $r <$ половины диагонали, то каждый прожектор может осветить лишь одну точку $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ одна из точек окажется неосвещённой.

Ответ: 27,1 м

Задание 3.

Пусть 1 - полный заряд,

тогда $\frac{1}{3}$ - разрядка из-за просмотра видео

$\frac{1}{5}$ - разрядка из-за Тетриса.

t - время пути

$\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{t}{6}+\frac{t}{10}=\frac{16t}{60}=1 \Rightarrow t=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}$ с

S - расстояние

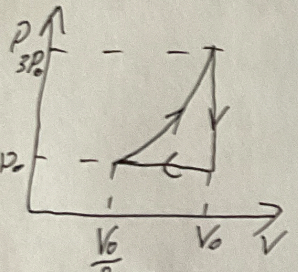
$\frac{S}{2\cdot 80}+\frac{S}{2\cdot 60}=\frac{15}{4}$

$\frac{S}{40}+\frac{S}{30}=15 \Rightarrow S\approx 257$ м

Ответ: 257 м.

Задание 4.

Изобразим циклический процесс в PV диаграмме



$V=\frac{m}{\rho}$

$V_1=\frac{V_0}{3}$

По уравнению Менделеева-Клапейрона

$PV=\nu RT$. $\nu\cdot R=const$

$T=\frac{PV}{\nu R} \Rightarrow$

$T_{max}=\frac{3P_0V_0}{\nu R}$; $T_{min}=\frac{P_0V_0}{3\nu R}$

$\eta=1-\frac{T_{min}}{T_{max}}=1-\frac{P_0V_0}{3\nu R}:\frac{3P_0V_0}{\nu R}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\eta_{исх}=\eta\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Задание 5.

$x(t)=3+\sin t\cdot\cos t-\sin t\cdot\cos t$; $y(t)=1$

Введём замену $a=\sin t+\cos t$, $|a|\le\sqrt{2}$

$a^2=(\sin t+\cos t)^2=\sin^2 t+2\sin t\cdot\cos t+\cos^2 t$

$x(t)=3+\frac{a^2-1}{2}-a=\frac{a^2-2a-1}{2}+3=\frac{a^2-2a+5}{2}=\frac{a^2-2a+1+4}{2}=$

$=\frac{1}{2}(a-1)^2+2$ - это парабола.

Минимальное значение функции $=2$

Максимальное значение функции $=\frac{7+2\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{2}+\sqrt{2}$

$a=\sqrt{2}$ $\qquad$ $a=-\sqrt{2}$

$x(t)=\frac{2-2\sqrt{2}+5}{2}$ $\qquad$ $x(t)=\frac{2+2\sqrt{2}+5}{2}$

$x(t)=\frac{7-2\sqrt{2}}{2}<x(t)=\frac{7+2\sqrt{2}}{2}$

Тогда область значения функции есть отрезок AB, где $A(2;1)$ и $B(\frac{7}{2}+\sqrt{2};1)$

$c\cdot 2=1$ $\qquad$ $c\cdot(\frac{7}{2}+\sqrt{2})=1$

$c=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $c=\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}$

$c\in[\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}};\frac{1}{2}]$

Ответ: $[\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}};\frac{1}{2}]$.

Задание 6.

точки 1 и 2 имеют одинаковые массы m

их радиус-векторы равны:

$\vec{r_1}(x_1; y_1)$; $\vec{r_2}(x_2; y_2)$

тогда радиус-вектор точки A равен:

$$\vec{r_c} = \frac{m\vec{r_1} + m\vec{r_2}}{m+m} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2} \Rightarrow A \text{ - центр масс.}$$

По второму закону Ньютона

(внешние силы) на точку A действуют

$$2m\vec{a} = 2m\vec{g} \quad |:2m$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

точка A будет двигаться равноускоренно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{r_c} = r_{c_0} + V_{c_0}t + \frac{gt^2}{2}, \text{ где } V_{c_0} = \dot{\vec{r}}_{c_0} = \frac{v_{1_0} + v_{2_0}}{2}$$

т.к. искомая величина - высота подъёма точки A, рассмотрим движение точки A по оси Y.

$$y_c - y_{c_0} = V_{c_0}t + \frac{gt^2}{2}, \text{ где } V_{c_0} = \frac{v_1 \cdot \sin\beta + v_2 \cdot \sin\angle}{2}.$$

$$h = \frac{gt^2}{2} + t\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\angle}{2}\right) \text{ - это парабола.}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\angle}{2}\right)^2$$

Ответ: $\frac{1}{2g}\left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\angle}{2}\right)^2$.

Черновик

1) Дано:
$t = 15с$
$v_к = 100 км/ч$
$v_0 = 0 м/с$
$S - ?$

Решение:

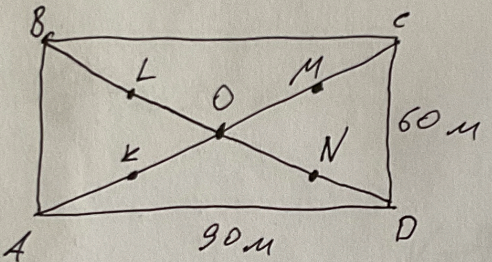
$$a = \frac{v_к - v_0}{t} = \frac{v_к}{t}$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v_к \cdot t^2}{t \cdot 2} = \frac{v_к \cdot t}{2}$$

$$S = \frac{100000 \cdot 15}{2 \cdot 3600} = \frac{125 \cdot 5}{24} = \frac{125 \cdot 5}{3} \approx 208 м.$$

$125 \times 5 = 625$
$625 : 3 = 208,3$

2)



$AC = BD$
$AO = CO = BO = OD$
$BL = LO = OM = MC = DN = NO = OK = KA$

K, L, M, N - точки расположения, тогда освещается круг радиусом четверть диагонали.

$$r = h \Rightarrow h = \sqrt{\frac{90^2 + 60^2}{4}} = \sqrt{\frac{8100 + 3600}{4}} = \sqrt{\frac{11700}{4}} \approx =$$

$101 \times 101 = 10201$
$102 \times 102 = 20604$
$11700 : 4 = 2925$

$$\frac{\sqrt{11700}}{4} = \frac{10}{4}\sqrt{117} = \frac{30}{4}\sqrt{13} = \frac{15}{2}\sqrt{13} \approx 27,1$$

$1011 : 4 = 25,25$

3)

Пусть 1 - полный заряд.

Тогда. $\frac{1}{3}$ - разрядка из-за видео

$\frac{1}{5}$ - разрядка из-за Тетриса.

t - время пути

$$\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{t}{6}+\frac{t}{10}=\frac{16t}{60}=1 \Rightarrow t=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}.$$

S - расстояние.

$$\frac{S}{2\cdot 80}+\frac{S}{2\cdot 60}=\frac{15}{4} \Rightarrow \frac{S}{40}+\frac{S}{30}=15 \Rightarrow \frac{70S}{1200}=15$$

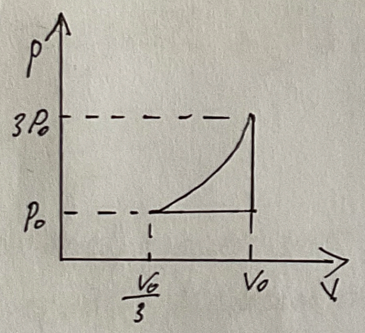
$$S=\frac{15\cdot 1200}{70}=\frac{15\cdot 120}{7}\approx 257.$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 15 \\ \hline 600 \\ 120 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$1800 : 7 = 257,1$

-14, 40, -35, 50, -49, 10, -7, 3

4)



$V=\frac{m}{\rho}$. $V_1=\frac{m}{3\rho}=\frac{V_0}{3}$.

По уравнению Менделеева-Клапейрона.

$$pV=\underbrace{\nu R}_{=const}T$$

$$T=\frac{PV}{\nu R}.$$

$$T_{max}=\frac{3P_0V_0}{\nu R};\quad T_{min}=\frac{P_0V_0}{3\nu R}$$

$$\eta=1-\frac{T_{min}}{T_{max}}=1-\frac{P_0V_0}{3\nu R}\cdot\frac{3P_0V_0}{\nu R}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\eta_{мх}=\frac{8}{9}:8=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{9}.$$

Черновик 7.

5) $x(t)=3+\sin t\cdot\cos t-\sin t-\cos t \quad y(t)=1$

$(\sin t+\cos t)^2=\sin^2 t+2\sin t\cdot\cos t+\cos^2 t=1+2\sin t\cdot\cos t$

$a=\sin t+\cos t \qquad |a|\le\sqrt{2}$

$3+\frac{a^2-1}{2}-a=\frac{a^2-1}{2}-a+3=\frac{a^2-2a-1}{2}+3=$

$=\frac{a^2-2a-1+6}{2}=\frac{a^2-2a+5}{2}=\frac{a^2-2a+4+1}{2}=\frac{1}{2}(a-1)^2+2$

парабола. вершина в точке $(1;2)\Rightarrow 2$-min значение.

max значение $a=-\sqrt{2}$ $x(t)=$ ~~$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+2=$~~

$x(t)_1=\frac{2+2\sqrt{2}+5}{2}=\frac{7+2\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{2}+\sqrt{2}$

при $a=\sqrt{2}$ $x(t)_2=\frac{7-2\sqrt{2}}{2}$

$x(t)_2<x(t)_1 \Rightarrow x(t)_1$ - max знач. $\Rightarrow$

область значений:

ф-ция проходит через весь отрезок AB, где

$A(2;1)$; B ~~$(\frac{7+2\sqrt{2}}{2};1)$~~ $B(\frac{7}{2}+\sqrt{2};1)$

$c_1\cdot 2=1 \qquad c_2\cdot\frac{7+2\sqrt{2}}{2}=1 \qquad \frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}{(\frac{7}{2}+\sqrt{2})^2}=\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}{\frac{49}{4}+7\sqrt{2}+2}=$

$c_1=\frac{1}{2} \qquad c_2=\frac{2}{7+2\sqrt{2}}$

$c\left[\frac{1}{2};\frac{2}{7+2\sqrt{2}}\right]$

$=\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}{\frac{56}{4}+7\sqrt{2}}=\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}{14+7\sqrt{2}}$

$\frac{1}{3{,}5+1{,}4}\approx\frac{1}{6{,}9}=\frac{10}{69}\vee\frac{1}{2}. \quad \frac{1}{6{,}9}<\frac{1}{2}$

Черновик. 8

б) точки 1 и 2 имеют одинаковую массу
~~и~~ их радиус-векторы равны:

$\vec{r}_1 (x_1; y_1)$ $\vec{r}_2 (x_2; y_2)$

тогда радиус-вектор точки A равен

$$\vec{r_c} = \frac{m\vec{r_1} + m\vec{r_2}}{m+m} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2} \Rightarrow A \text{ - центр масс.}$$

По ~~II~~ II закону Ньютона
(внешние силы) на точку A действуют

$$\Sigma m\vec{a} = \Sigma m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

причём, точка A будет ~~двигаться~~ двигаться равноускоренно $\Rightarrow r_c = r_{c0} + v_{c0} t + \frac{gt^2}{2}$, где $v_{c0} = \frac{v_{1_0} + v_{2_0}}{2} = \dot{\vec{r_c}}$

т.к. ~~…~~ искомая величина - высота подъёма точки рассмотрим движение точки A по оси y

$$y_c - y_{c_0} = v_{c_0} t + \frac{gt^2}{2}, \text{ где } v_{c_0} = \frac{v_1 \cdot \sin\beta + v_2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

~~v_{c_0} … можно выразить из $\vec{r_c}$~~

$$\overbrace{y_c - y_{c_0}}^{h} = \left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}\right) \cdot t + \frac{gt^2}{2}. \text{ - парабола.}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha}{2}\right)^2.$$