МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Спиркина Дарья Олеговна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Спиркина Дарья Олеговна

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	15 баллов	90 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик

Задача №1

$\tau = 15$ секунд

$v_0 = 100$ км/ч $= \frac{100}{3,6}$ м/с

$l = ?$ - длина разбега

Решение:

Пусть самолет движется равноускоренно с ускорением a. Тогда

$$\begin{cases} x(t) = \frac{at^2}{2} \\ v(t) = at \end{cases}$$ (равноускоренное движ. без начальн. скорости)

$x(\tau)$ - координата самолета в момент отрыва от земли, если начало координат находится в точке старта.

$v(\tau)$ - скорость отрыва $\Rightarrow$ $x(\tau) = l$ - длина разбега

$v(\tau) = v_0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} l = \frac{a\tau^2}{2} \\ v_0 = a\tau \end{cases} \Rightarrow l = \frac{v_0 \tau}{2}$$

$$l = \frac{100 \cdot \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1,2}{\cancel{3,6}} \cdot 2} = \frac{\overset{125}{\cancel{500}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{625}{3} = 208\frac{1}{3}\text{ м}$$

$\Downarrow$

208 м

Ответ: 208 м

1

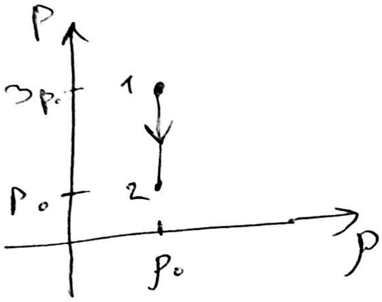
Чистовик

1: $3p_0 = \frac{\rho_0 T_0 R}{M_ч}$, T_0 - начальная температура

(1) температура в ходе процесса постоянно падает

2: $p_0 = \frac{\rho_0 T_2 R}{M_ч}$ - ур-е Менделеева-Клапейрона в конце первого этапа

$\Rightarrow 3 = \frac{T_0}{T_2}$



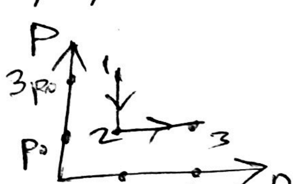
2 этап: Изобарическое увеличение плотности с ρ_0 до $3\rho_0$

$p_0 = \rho_0 \frac{T_2 R}{M_ч} \longrightarrow p_0 = \frac{3\rho_0 R T_3}{M_ч}$

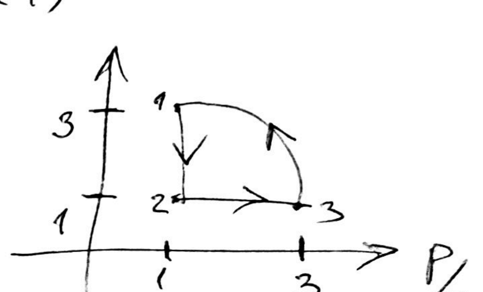
$\Downarrow$

$T_2 = 3 \cdot T_3$, T_3 - темпер. в конце 3-его этапа

Этап сопровождается охлаждением (непрерывным, т.к. $T \sim \frac{1}{\rho}$) из (1)



$\xrightarrow{\text{если рисовать}}$ в осях $\frac{p}{p_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$



Третий этап - четверть окружности с центром в (1; 1) на графике $\frac{p}{p_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$

(Чистовик)

Уравнение окружности:

$$\left(\frac{P}{P_0}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)^2=4$$ (радиус равен 2)

$$\frac{P}{P_0}-1=\pm\sqrt{4-\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)^2},$$ но знак „−" не подходит, т.к. нас интересует I четверть окружности.

Из уравнения (1) следует, что T возрастает с повышением p и уменьшением ρ.

$\Rightarrow$, поскольку на этапе 3 p возрастает, а ρ уменьшается, T строго возрастает, $\Rightarrow$ самая низкая температура будет в точке 3:

$$T_x=T_3=\frac{T_2}{3}=\frac{T_0}{9},$$ а T_0 - самая большая температура

$$\Downarrow$$

$$T_0=T_H$$

$$T_x=\frac{T_0}{9}=\frac{T_H}{9}\Rightarrow T_H=9T_x\Rightarrow \eta_k=\frac{T_H-T_x}{T_H}=$$

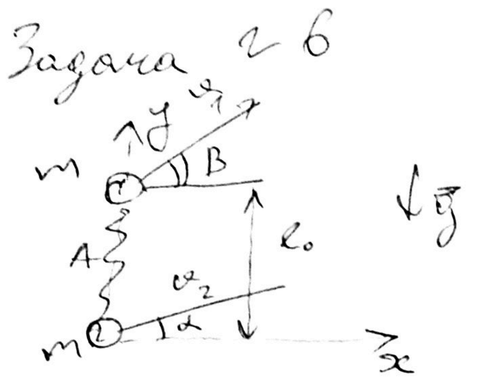
$$=\frac{8T_x}{T_x}=\frac{8}{9}$$

$$\boxed{\eta=\frac{\eta_k}{8}=\frac{1}{9}}$$

11 Ответ: $\eta=\frac{1}{9}$

Задача №6

Чистовик



Из начально пружина была недеформирована т.к если бы была деформирована то ответ должен был зависеть от коэффициента жесткости, который не дан в условии.

Т.к грузы одинаковой массы, точка A совпадает с центром масс конструкции. Внутренние силы (упругости пружины) не оказывают влияние на движение центра масс, только внешние. По 2-ому закону Ньютона для центра масс системы (след. суммы 2-ых зак. Ньютона для каждой МТ системы)

$$2m\vec{a}_{цм} = m\vec{g} + m\vec{g}$$

$$\Downarrow (1)$$

$\vec{a}_{цм} = \vec{g}$ => $\vec{a}_{цм}$ имеет только y состав.

$$a_{цм}^{(y)} = -g$$

Начальный импульс центра масс в проекции на ось Y:

Чистовик

$$P^{(0)}_{цмy} = 2m\,v^{(0)}_{цмy} = m v_1 \sin\beta + m v_2 \sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$v^{(0)}_{цмy} = v_1 \sin\beta + v_2 \sin\alpha -$$

– нач. скорость центра масс (точки A)

Скорость по y меняется из-за ускорения по закону: $v_{цмy}(t) = v^{(0)}_{цмy} - g(t)$

координата $y_A(t)$ тогда у точки A меняется по закону: $y_A(t) = y_0 + v^{(0)}_{цмy} t - \frac{gt^2}{2}$

Максимальная высота полета – тогда, когда скорость $v_{цмy}(t)$ обратится в ноль.

h – макс высота

$h = y_A(t) - y_0$

$$\begin{cases} 0 = v^{(0)}_{цмy} - gt \\ h = t\,v^{(0)}_{цмy} - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

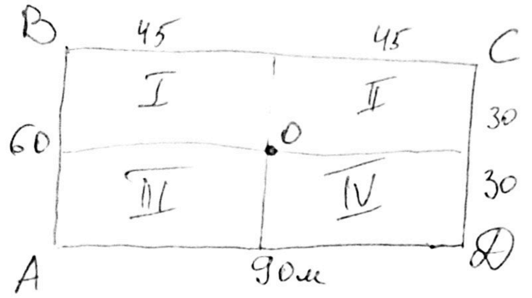
$$h = \frac{v^{2(0)}_{цмy}}{2g} = \frac{(v_1 \cdot \sin\beta + v_2 \sin\alpha)^2}{2g}$$

13

Ответ: $\frac{(v_1 \sin\beta + v_2 \cdot \sin\alpha)^2}{2g}$

Чистовик

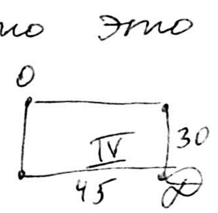
Задача №2



Дано: высота кратна 0,1м
каждая точка освещена
$h = R$ - освещения
Найти: h_{min}

Решение: Прожектор освещает круг радиуса $R = h$, поле надо замостить 4-я кругами минимального радиуса.

Разобьем прямоугольник на 4 равных области по серединам сторон поля. За каждую угловую точку „ответственен" как минимум 1 круг. Но и точку центра кто-то из них должен покрывать (т.O). Если хотя бы один круг будет покрывать более 1 угловой (A, B, C, D) точки, то высота h $(=R)$ должна быть больше, либо равна 30м, но мы сможем добиться меньшего результата, поэтому каждую угловую точку покрывает ровно 1 прожектор. Какой-нибудь из них при этом должен ещё и покрыть точку центра O. Не ограничивая общности, будем считать, что это будет круг в области IV. Нарисуем



круг должен покрывать O и D

Значит, что его диаметр должен быть

$D_{IV} \geq OD$. $OD = \sqrt{30^2+45^2} = 15\sqrt{2^2+3^2} = 15\sqrt{13}$

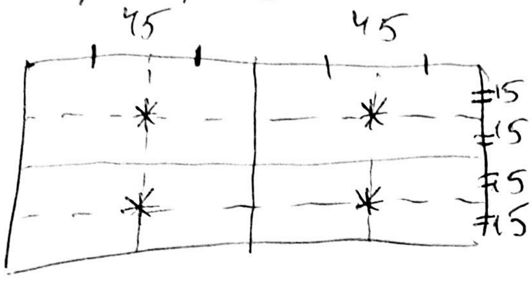
Чистовик

Значит, радиус круга должен быть

$R_{IV} \geq \frac{OD}{2} = \frac{15\sqrt{13}}{2} \approx 27{,}04$ (м) (окр. до сотых)

Но по условию, радиус должен быть (высота равна радиусу) кратен 0,1 м $\Rightarrow$ подходящий радиус тогда $R^{(\text{наим})} = 27{,}1$

Пример размещения прожекторов для $R = 27{,}1$ м



каждая из них будет находиться в своей области (из четырёх) прямоугольника в центре неё.

Тогда, поскольку расстояния до любой точки внутри каждой области меньше либо равно ($\leq$) расстояния до угловых точек (равное диагонали пополам), а радиус круга больше ($>$) диагонали пополам ($27{,}1 > \frac{\text{диаг}}{2}$), то каждая точка в каждой из 4-ех равных областей будет покрыта хотя бы одним прожектором Ч.Т.Д

Ответ: 27,1 м

3

Задача №5 (Чистовик)

$$\begin{cases} x(t) = 3 + \sin(t)\cdot\cos(t) - \sin(t) - \cos(t) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

Найдем, какие значения может принимать $x(t)$: $3 + \underbrace{\sin(t)\cdot\cos(t)}_{\le 1} - \underbrace{\sin(t)}_{\le 1} - \underbrace{\cos(t)}_{\le 1}$. По если

Каждое из этих трех слагаемых меньше единицы по модулю. $\Rightarrow 0 < x(t) < 6$

Найдем производную этой функции и её нули - это будут точки экстремума этой функции. Так мы доуточним в каких пределах изменяется $x(t)$:

$$\left(3 + \sin(t)\cdot\cos(t) - \sin(t) - \cos(t)\right)'$$

$$(\sin(t))'\cdot\cos(t) + \sin(t)\cdot(\cos(t))' - \cos(t) + \sin(t)$$

$$\cos^2(t) - \sin^2(t) - \cos(t) + \sin(t)$$

Найдем её нули:

$$\cos^2(t) - \sin^2(t) - \cos(t) + \sin(t) = 0$$

$$(\cos(t) - \sin(t))(\cos(t) + \sin(t) - 1) = 0$$

$\cos(t) = \sin(t)$ $\qquad\qquad$ $\cos(t) + \sin(t) - 1 = 0$

$tg(t) = 1$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi n_1 \qquad n_1 \in \mathbb{Z}$

4

Чистовик ~~[illegible]~~

$$\sqrt{2}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\right) - 1$$ ✓ Ищем нули $(\cos(t)+\sin(t))-1=0$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin(t)\right) - 1 =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 1 = 0$$

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значит,

1) $t+\frac{\pi}{4} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n_2$

2) $t+\frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n_3$

$\Rightarrow$ $t = 2\pi n_2$, где $n_2 \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_3$, где $n_3 \in \mathbb{Z}$

Поэтому, у нас получилось 3 серии решений

$$t = \pi n_1 + \frac{\pi}{4}$$
$$t = 2\pi n_2 + \frac{\pi}{2} \qquad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$$
$$t = 2\pi n_3$$

Понятно, что это функция периодична с периодом 2π, поэтому найдем значение ее экстремумов от 0 до 2π. Это будут точки $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$

$$X(0) = 3 + 0 + 0 - 1 = 2$$

$$X\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} > 2$$

5

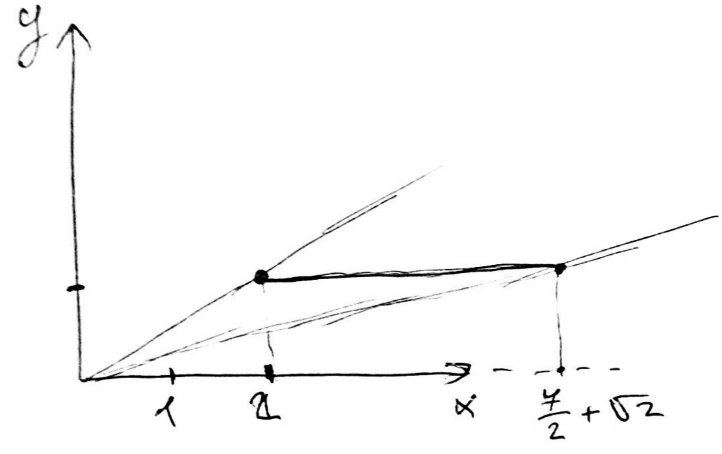
Черновик

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 0 + 0 - 1 = 2$

$x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 3 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} =$

$= \frac{7}{2} + \sqrt{2}$

Получается минимальное значение $x(t) = 2$, а максимальное $\frac{7}{2} + \sqrt{2}$. Из непрерывности тригонометрических функций $2 \leq x(t) \leq \frac{7}{2} + \sqrt{2}$, для каждого числа из этого отрезка, найдется момент времени когда точка там была.



Поэтому: $y = c_1 x$ $\quad 1 = c_2 \cdot \left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}\right)$

$1 = c_1 \cdot 2 \quad c_2 = \frac{1}{\frac{7}{2} + \sqrt{2}}$

$c_1 = \frac{1}{2}$

Поэтому при $\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}} \leq c \leq \frac{1}{2}$ будет проходить через этот отрезок.

Ответ: $\frac{1}{\frac{7}{2}+\sqrt{2}} \leq c \leq \frac{1}{2}$

6

Задача № 3

Чистовик

Дано: телефон разрядился ровно к концу поездки

$\frac{1}{2}\tau$ - тетрис

$\frac{1}{2}\tau$ - мультики

τ - время поездки

$t_м = 3ч$ - время разрядки от видео

$t_т = 5ч$ - время разрядки от тетриса

$\frac{1}{2}S$ эл-ка ехала с $v_{ср}^{(1)} = 80 км/ч$

$\frac{1}{2}S$ эл-ка ехала с $v_{ср}^{(2)} = 60 км/ч$

Найти $S = ?$ - расстояние кот пр. эл-ка

Запишем время τ поездки через времена двит. электр:

$$\underbrace{\frac{\frac{1}{2}S}{v_{ср}^{(1)}}}_{\text{время первой половины пути}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}S}{v_{ср}^{(2)}}}_{\text{время второй пол. пути}} = \tau$$

7

Решение:

Пускай B - полный заряд батареи.

$\gamma_т$ - скорость разрядки батареи от тет

$\gamma_в$ - анал. от мульт.

$$\frac{B}{t_т} = \gamma_т \quad и \quad \frac{B}{t_м} = \gamma_м$$

Т.к батарея разрядилась полностью за $\frac{\tau}{2}$ просмотра мультиков и $\frac{\tau}{2}$ тетриса, то

$$B = \gamma_т\frac{\tau}{2} + \gamma_м\frac{\tau}{2} = (\gamma_т + \gamma_м)\frac{\tau}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$B = \left(\frac{B}{t_т} + \frac{B}{t_м}\right)\frac{\tau}{2} \Big| :B$$

$$1 = \left(\frac{1}{t_т} + \frac{1}{t_м}\right)\frac{\tau}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = \frac{2}{\left(\frac{1}{t_т} + \frac{1}{t_м}\right)} = \frac{2t_т t_м}{t_т + t_м}$$

Чистовик

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}S}{V_{ср}^{(1)}} + \frac{\frac{1}{2}S}{V_{ср}^{(2)}} = \frac{2t_T t_M}{t_T + t_M} \Rightarrow S = \frac{4t_T t_M V_{ср}^{(1)} V_{ср}^{(2)}}{(t_T + t_M)(V_{ср}^{(1)} + V_{ср}^{(2)})}$$

Численно:

$$S = \frac{4 \cdot 3.5 \cdot 80 \cdot 60}{8 \cdot 140} = \frac{1800}{7} \text{ км} = 257\frac{1}{7} \approx 257 \text{ км}$$

Ответ: 257 км.

(8)

Задача 24

Чистовик

Решение: максимально возможный КПД при T_x и $T_н$ - температурах холодильника (минимальная) и нагревателя (максимальная) соответственно, достигается при цикле Карно.

КПД цикла Карно: $\eta_к = \frac{T_н - T_x}{T_н}$. Известно, что КПД нашего цикла в 8 раз меньше $\eta_к$: $\eta = \frac{\eta_к}{8}$.

Уравнение Менделеева - Клапейрона

$$pV = \nu RT \rightarrow pV = \frac{m}{M_ч} RT$$

$$pV = \frac{\rho V}{M_ч} RT, \ \rho \text{ - плотность газа}$$

$M_ч$ - молер. масса газа

m - масса газа.

V - объем газа массы m $\Rightarrow \boxed{p = \rho \frac{RT}{M_ч}}$ (1)

1 этап: изохорное уменьшение давления с $3p_0$ до p_0 $\boxed{\text{отступление}}$ $V = const = \frac{m}{\rho}$, если рассматривать одну и ту же массу газа, то $m = const \Rightarrow \rho = const = \rho_0$ - начальная плотность газа.

9