МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Фролов Иван Григорьевич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Фролов Иван Григорьевич

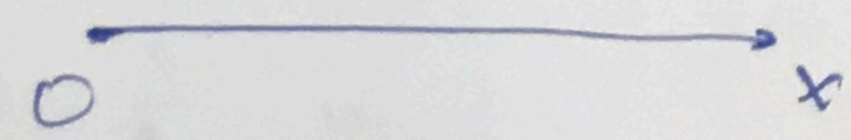
Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	95 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

№1 Чистовик ①

Пусть самолёт движется вдоль $\vec{Ox}$, стартуя в нуле.



a – ускорение.

$V=V(t)=a\cdot t$, где V – скорость отрыва, $V=100\ км/ч=\frac{100}{3{,}6}\ м/с$

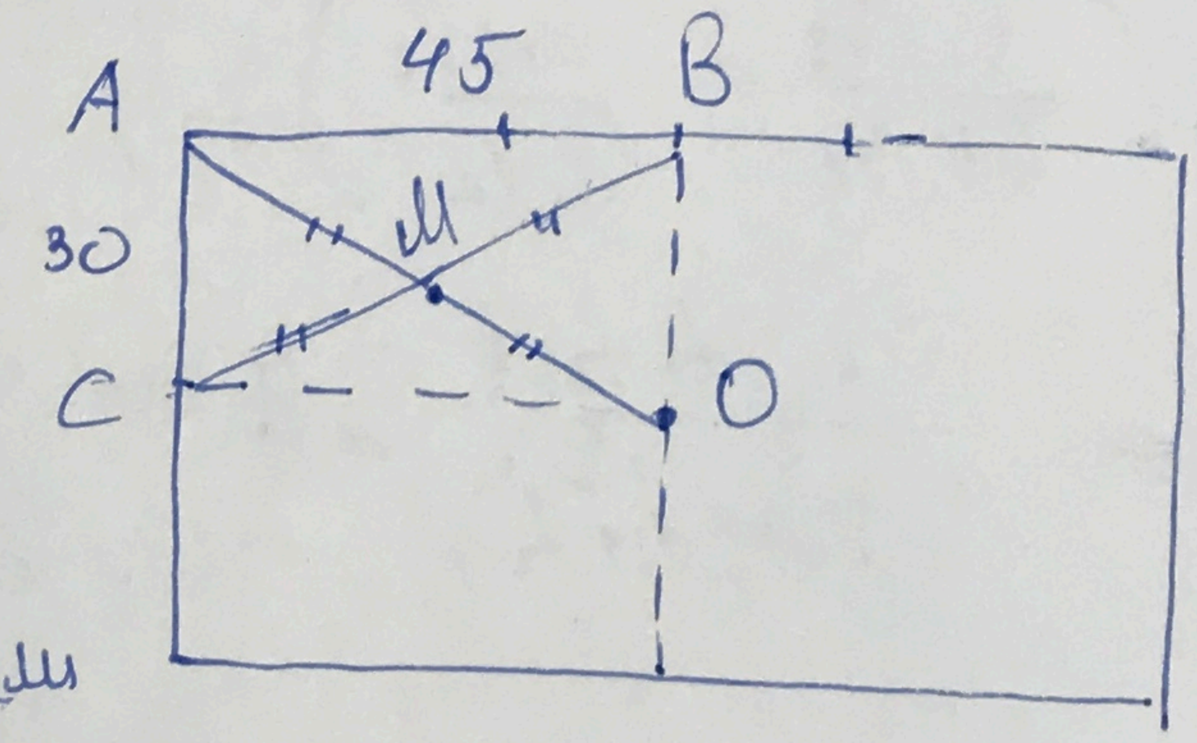
$t=15с$

$a=\frac{V}{t}$,

$x(t)=\frac{at^2}{2}=\frac{Vt}{2}=\frac{100\cdot 15}{7{,}2}=100\left(2+\frac{6}{7{,}2}\right)=200+\frac{600}{7{,}2}\approx 208м$

Ответ: 208м

№2 Из соображений симметрии каждый круг должен покрывать четверть поля (то есть, быть описанным около прямоугольника с вершинами в центре поля, углу поля и серединах соответствующих сторон).



Рассмотрим один из таких прямоугольников CABO.

$R=AM=\frac{1}{2}\sqrt{45^2+30^2}=\frac{15}{2}\sqrt{(4+9)}=\frac{15}{2}\sqrt{13}$

Докажем, что $27<\frac{15}{2}\sqrt{13}<27{,}1$

$\frac{54}{15}<\sqrt{13}<\frac{54{,}2}{15}\ \Big|^2$

$\frac{2916}{225}<13<\frac{2937{,}64}{225}$

$2916<2925<2937{,}64$ – верно

Ответ: 27,1м

№3 Чистовик 2

Обозначим S - путь Гаврилы

$V_1 = 80 \frac{км}{ч}$, $V_2 = 60 \frac{км}{ч}$

$t_1 = 3ч$, $t_2 = 5ч$

k - ёмкость аккумулятора

1) $\frac{S}{2V_1} + \frac{S}{2V_2} = \frac{S}{2} \cdot \frac{V_1+V_2}{V_1 \cdot V_2}$ - общее время

$\frac{S}{4} \frac{V_1+V_2}{V_1 \cdot V_2}$ - половина времени

$$\frac{k}{t_1} \cdot \left(\frac{S}{4} \frac{V_1+V_2}{V_1 \cdot V_2}\right) + \frac{k}{t_2}\left(\frac{S}{4} \frac{V_1+V_2}{V_1 \cdot V_2}\right) = k$$

$$\frac{S}{4}\left(\frac{V_1+V_2}{t_1 V_1 V_2} + \frac{V_1+V_2}{t_2 V_1 V_2}\right) = 1, \quad S \cdot \frac{V_1+V_2}{V_1 V_2} \cdot \frac{t_1+t_2}{t_1 t_2} = 4$$

$$S = \frac{V_1 V_2 \cdot t_1 t_2 \cdot 4}{(V_1+V_2)(t_1+t_2)} = \frac{4 \cdot 80 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 5}{140 \cdot 8} = \frac{40 \cdot 60 \cdot 15}{140} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 15}{7} = \frac{1800}{7} = 257\frac{1}{7}$$

≈ 257

Ответ: 257

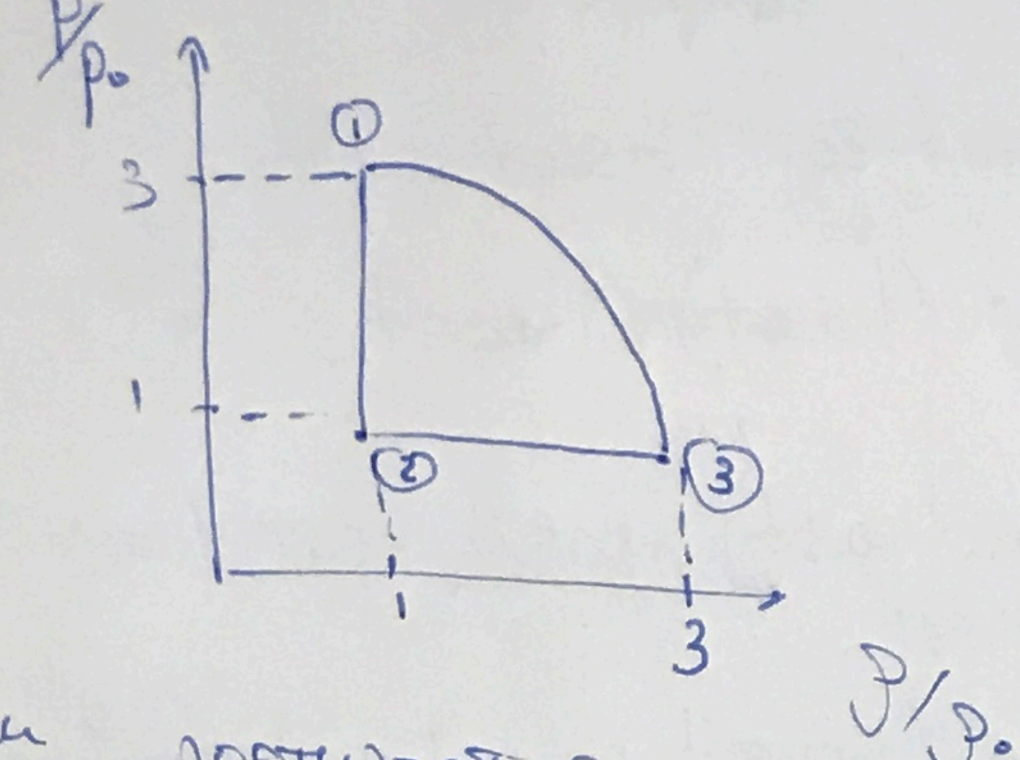
№4

Чистовик ③

Ур-е Менделеева-Клапейрона:

$pV = \nu RT \iff$

$p = \dfrac{\rho RT}{M}$, $T = \dfrac{pM}{\rho \cdot R}$



$T_{max} = \dfrac{3p_0 \cdot M}{\rho_0 \cdot R}$ (максимум достигается при макс. давлении и минимальной температуре) → состояние 1

$T_{min} = \dfrac{p_0 \cdot M}{3\rho_0 \cdot R}$ (состояние 3)

Понятно, что нигде на окружности экстремальные значения не достигаются.

$\eta_{max} = \dfrac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} = \dfrac{3 - \frac{1}{3}}{3} = \dfrac{8}{9}.$

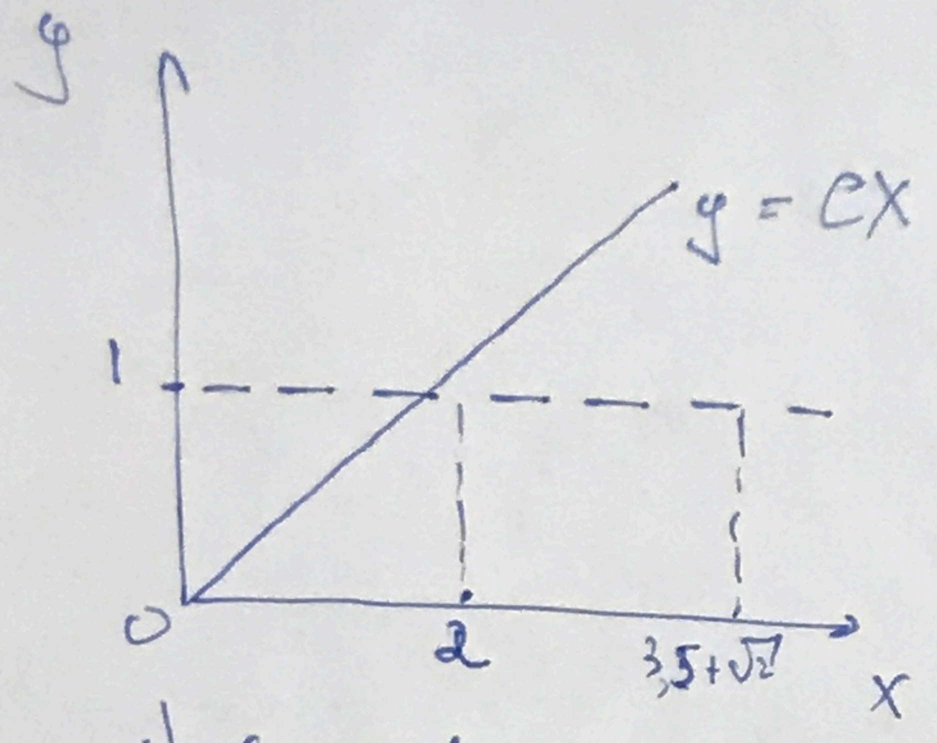
$\eta = \dfrac{\eta_{max}}{8} = \dfrac{1}{9}.$ Ответ: $1/9$

№5 Чистовик (4)

— непрерывная

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$x(t) = 2 + (1-\sin t)(1-\cos t)$



$x'(t) = (\sin t \cdot \cos t)' - \cos t + \sin t =$

$= \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t = (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t - 1)$

Экстремумы $x(t)$ достигаются только в нулях производной (при $t \to \infty$ экстремумы не достигаются в силу периодичности функции)

$x'(t) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos t = \sin t \\ \cos t + \sin t = 1 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, t = 1 \\ \sin(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ t = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Подставим в функцию $x(t)$:

$x(\frac{\pi}{4} + 2\pi n) = 3 + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = 3 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} = 3{,}5 - \sqrt{2}$

$x(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n) = 3 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 3{,}5 + \sqrt{2}$

$x(2\pi k) = 3 + 0 - 1 = 2$

$x(\frac{\pi}{2} + 2\pi m) = 3 + 0 - 1 = 2.$

Так как $3{,}5 + \sqrt{2} > 3{,}5 - \sqrt{2} > 2$, то

$x_{min} = 2$

$x_{max} = 3{,}5 + \sqrt{2}.$

$x(t)$ принимает ВСЕ значения от 2 до $3{,}5+\sqrt{2}$ включительно

Найдём значения c в крайних положениях луча:

$x = 3{,}5 + \sqrt{2}$: $c = \frac{1}{3{,}5+\sqrt{2}}$ (тангенс угла наклона)

Ответ: $c \in [\frac{1}{3{,}5+\sqrt{2}}; \frac{1}{2}]$

$x = 2$: $c = \frac{1}{2}$

№6 Чистовик 5

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= l_0 + V_1 \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ y_2(t) &= V_2 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\}$$ уравнения движения соответствующих масса вдоль Oy

Ордината точки A в любой момент времени равна $\frac{y_1(t)+y_2(t)}{2} = y_A(t)$

Нужно найти максимум ф-ции $y_A(t)$

$$y_A(t) = \frac{l_0}{2} - \frac{gt^2}{2} + \frac{t(V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha)}{2}$$

Пусть $V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha = a$. Тогда

$$y_A(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{at}{2} + \frac{l_0}{2}$$

$$t_0 = \frac{-a}{2\cdot(-g)} = \frac{a}{2g}$$ – абсцисса вершины параболы

$$y_{A\,max} = y_A(t_0) = -\frac{a^2}{8g} + \frac{a^2}{4g} + \frac{l_0}{2} = \frac{a^2}{8g} + \frac{l_0}{2}$$

Относительно начального положения:

$$y_{A\,max} - \frac{l_0}{2} = \frac{a^2}{8g} = \frac{(V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha)^2}{8g}$$

Ответ $\frac{(V\sin\beta + V_2\sin\alpha)^2}{8g}$

Оформление групп. Черновик
Создание баннеров / логотипов

hello, how r u   Come together
Right now, over me...

№ 22)

$\frac{100}{3,6}$

(№1) $t = 15c$

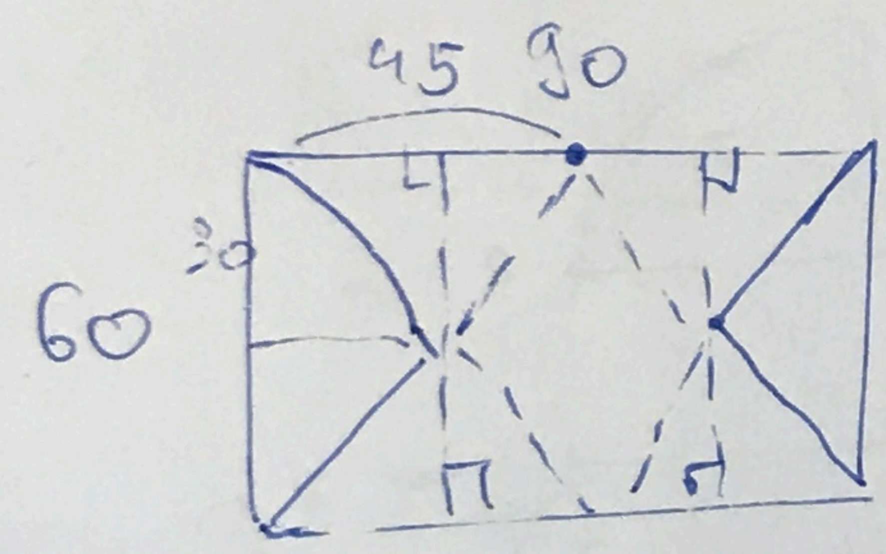
ℓ

$V(t) = a \cdot t = \frac{100}{36}$, $a = \frac{100}{t \cdot 36}$

$x(t) = \frac{at^2}{2}$ $\frac{100}{7,2 \cdot t} \cdot t^2 = \frac{100 \cdot t}{7,2} = \frac{100 \cdot 15}{7,2} = 100(2, \frac{8}{72}) =$

(№2)

$= 200 + \frac{600}{72} \approx 200 + 8 = 208$ м



$R = \sqrt{30^2 + \frac{45^2}{4}} = \frac{\sqrt{1800 + 2025}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3825}}{2} = \frac{5\sqrt{153}}{2} < 12,x$

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$

132

30

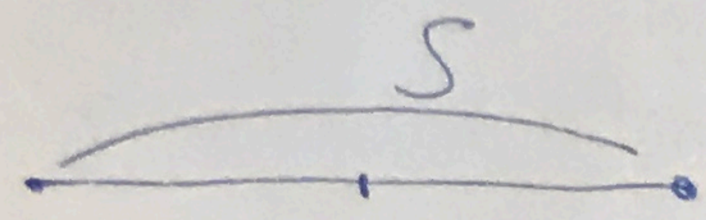
$\sqrt{153} < \frac{12,5 \cdot 2}{5} = \frac{25}{5} = 5.$

$\frac{5\sqrt{153}}{2} < 30,5$, $\sqrt{153} < \frac{61}{5}.$

$25 \cdot 153 < 61^2$

№3

Черновик



$$\frac{S}{2\cdot V_1}+\frac{S}{2V_2}=$$

$$=\frac{S}{2}\,\frac{V_1+V_2}{V_1\cdot V_2}$$ - общ. время $\quad \frac{S}{4}\,\frac{V_1+V_2}{V_1\cdot V_2}$ - Тетрис) Видео

$$\frac{k}{3}\cdot\frac{S}{4}\,\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}+\frac{k}{5}\cdot\frac{S}{4}\,\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}=k$$

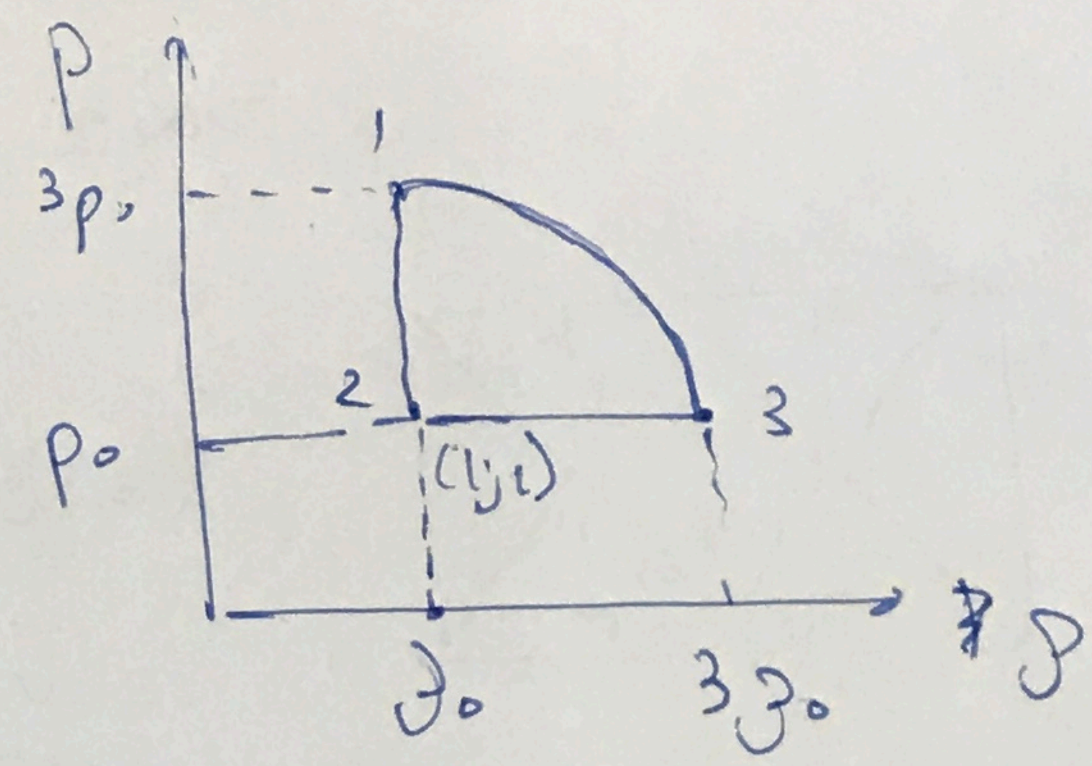
$$\frac{S}{4}\,\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\cdot\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)=1$$

$$S=\dots$$

№4

$$pV=\nu RT.=\frac{m}{\mu}RT.$$

$$p=\frac{\rho RT}{\mu}$$



$$\eta=\frac{A_{пол}}{Q}=$$

$$Q_{12}=\Delta U_{12}+A_{12}=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=$$

$$=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=$$

$$=\frac{3}{2}V_0\cdot(-2p_0)=\frac{3}{2}\frac{m}{\rho_0}(-2p_0)=$$

$$=-\frac{3m\,p_0}{\rho_0}$$

$$V=\frac{m}{\rho}$$

$$Q_{23}=\frac{5}{2}p_0\Delta V=\frac{5}{2}p_0\left(\frac{m}{3\rho_0}-\frac{m}{\rho_0}\right)=\frac{5}{2}\frac{m}{3\rho_0}\cdot p_0\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$Q_{31}=\quad p\Delta\rho=p\left(\frac{m}{V_k}-\frac{m}{V_0}\right)=pm\frac{V_0-V_k}{V_k\cdot V_0}$$

T_{min}

T_{max} $\quad T_1=\frac{p_1V_1}{\nu R}=\frac{3p_0\cdot m}{\rho_0\nu R}. \qquad T=\frac{\mu p}{\rho R}$

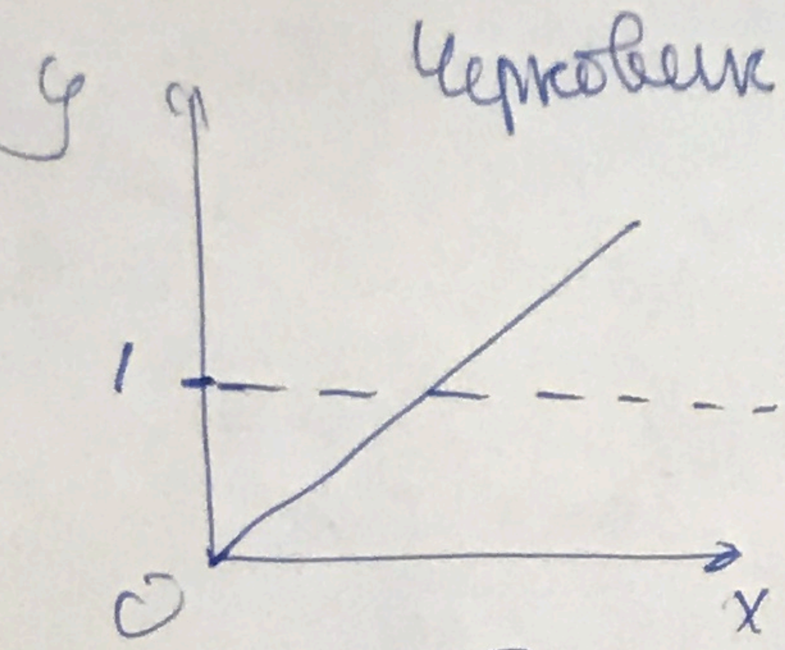
$$T_2=\frac{p_0\cdot m}{\rho_0\cdot\nu R.},\ T_3 \qquad T_{max}=\frac{\mu\cdot3p_0}{\rho_0\cdot R}\quad T_{min}=\frac{\mu p_0}{3\rho_0\cdot R}.$$

№5

Черновик

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$y(t) = 1$



$1 = cx, \quad x = \frac{1}{c}.$

При $t = 0: x = 2$

$t = 1: x = 2$

$x(t) =$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1.$

$\frac{t}{2}$

$\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2}(\sin 2t)$

$(1 - \sin t) + \cos t(\sin t - 1) =$

$= (\sin t - 1)(\cos t - 1) + 2$

$\sqrt{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sin(t + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sin 2t}{2\sqrt{2}}\right) =$

$= 4(6 - 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) + \sin 2t) =$

$-\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin 2t + 3 =$

$= 2\sqrt{2} \cdot 4($

$= \frac{1}{2}(\sin 2t - 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}) =$

$\sin 2t - 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) =$

$= 3($

$= \frac{1}{2}(\; 3(s$

$\sin 2t = 2\sin(t + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \sin(2t + \frac{\pi}{2}) =$

$= \underline{\cos 2t}$

$x'(t) = (\sin t \cos t)' - \cos t + \sin t =$

$= \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t + \sin t = (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t - 1) = 0$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

$\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$t = 2\pi n; \; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

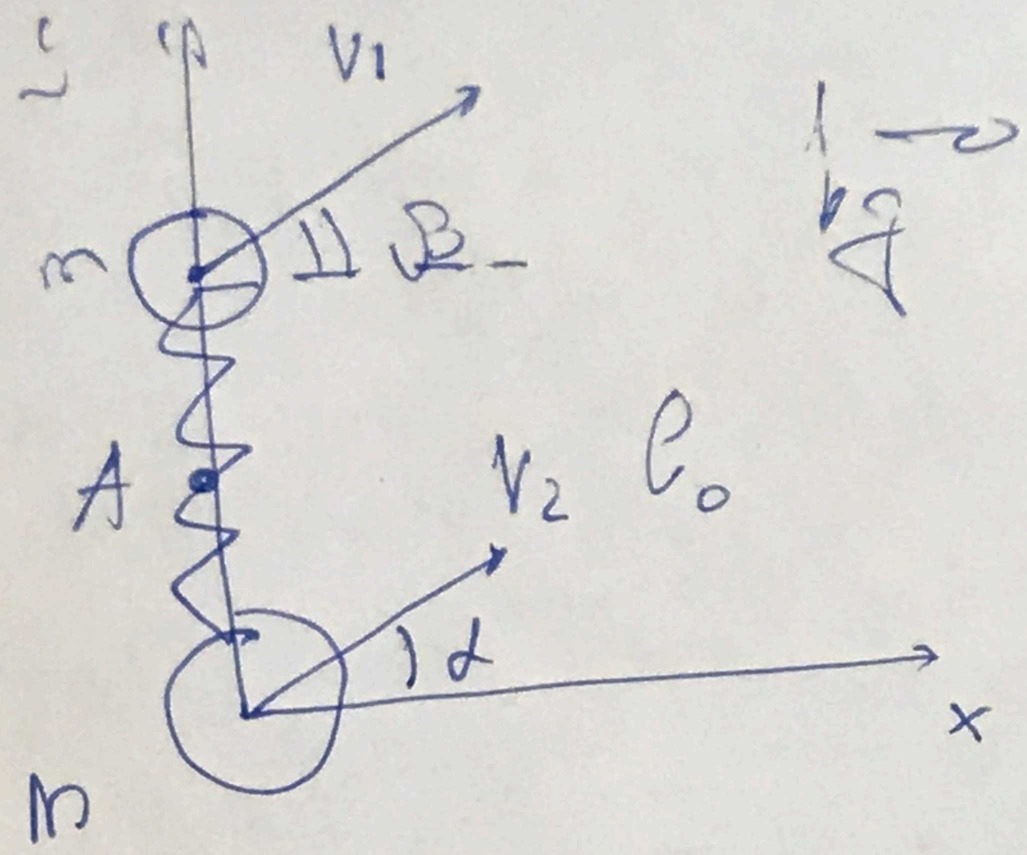
$3 + 0 - 1 = 2, \quad \frac{\pi}{4}: 3 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$

$3 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

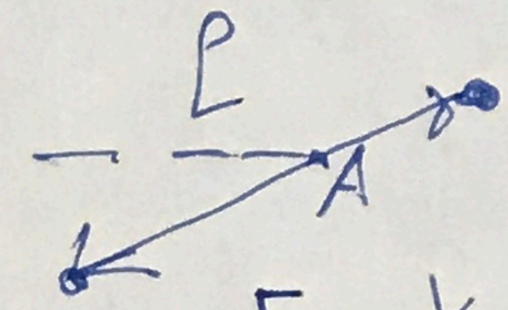
$3 - 1 = 2,$

Черновик

№6



$$x_1(t) = v_1 \cdot \cos\beta \cdot t$$
$$y_1(t) = l_0 + v_1 \cdot \sin\beta \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$
$$x_2(t) = v_2 \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y_2(t) = v_2 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$



$$F = k \cdot l$$

$$\frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = \frac{l_0}{2} + \frac{t(v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha)}{2} - \frac{g t^2}{2} \to \max$$

$$mg = k \cdot l_0, \quad k = \frac{mg}{l_0}$$

$$-\frac{g}{2} t^2 + \frac{v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha}{2} \cdot t + l_0 \to \max$$

$$t_в = \frac{\overbrace{v_1\sin\beta + v_2\sin\alpha}^{a}}{2 \cdot g}$$

$$y_{max} = \frac{a^2}{-8g} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2g} + l_0 = \frac{2a^2 - a^2}{8g} + l_0 = \frac{a^2}{8g} + \frac{l_0}{2}$$

Ответ: $\frac{a^2}{8g}$.