МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**
Профиль олимпиады: **Механика и математическое моделирование**
ФИО участника олимпиады: **Цуркан Егор Вячеславович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **09 марта 2022 года**

Олимпиада «Ломонсов» по механике и математическому моделированию
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Цуркан Егор Вячеславович

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	95 баллов

* Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик Вариант 221

1.

Дано:
$t = 15$ с.
$v = 100$ км/ч

СИ:
100 км/ч $= \frac{100\,000}{3600}$ м/с

$S - ?$

$\boxed{v = at}$ $\boxed{S = \frac{at^2}{2}}$

1) $v = at$

$\frac{100\,000}{3600} = a \cdot 15$

$a = \frac{100\,000}{3600} \cdot \frac{1}{15} = 1{,}85$ м/с²

2) $S = \frac{at^2}{2}$

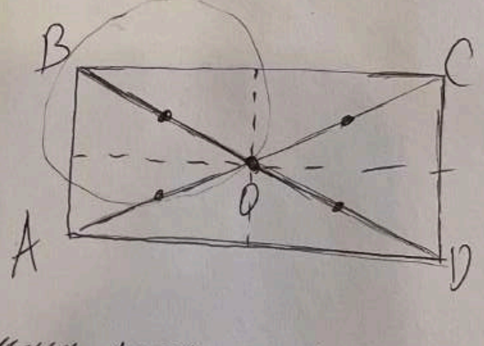
$S = \frac{1{,}85 \cdot 225}{2} \approx 280$ м.

Ответ: 280 м.

2.

Дано:
- ABCD - прямоугольник
- $BC = AD = 90$ м.
- $AB = CD = 60$ м.
- r (радиус круга) $= h$ (высоте на которой подвешен светильник)

$h_{min} - ?$



1) Пусть диагонали прямоугольника пересекаются в точке O и разместим прожектора на точках середин отрезков AO, BO, CO, DO на высоте равной четверти диагонали прямоугольника, то в таком случае круги с центром в этих точках будут полностью освещать прямоугольники с диагоналями AO, BO, CO и DO. В этом случае всё поле будет освещено. Значит высота потолка будет равна $\frac{\sqrt{90^2+60^2}}{4}$

$=$

I

Чистович

2.

...

$$\sqrt{\frac{90^2+60^2}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{117} = \frac{15}{2}\sqrt{13}$$

2) Докажем, что это ~~...~~ самое выгодное расположение. Для этого используем принцип Дирихле:

- Возьмём 5 точек: A B C D и O и предположим, что диаметр круга меньше чем половина диагонали прямоугольника, значит один прожектор осветит не больше чем одну из этих 4 точек, значит хотя бы одна ~~...~~ точка останется не освещенной.

3) $\frac{15}{2}\sqrt{13} = \sqrt{731,25}$

$$\underset{27^2}{729} < 731,25 < \underset{27,1^2}{734,41} \Rightarrow$$ высота потолка должна быть равна 27,1 м. $h_{min} = 27,1$

Ответ: 27,1

3.

Дано:

- I пол. пути: Тетрис
- II пол. пути: видео
- пол. разряжается за 3 ч. видео
- пол. разрядится за 5 ч. Тетрис

$v_{ср. 1} = 80$ км/ч

$v_{ср. 2} = 60$ км/ч

$S - ?$

Возьмём условную единицу ёмкости смартфона за 1. Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна $\frac{1}{3}$, а при игре в тетрис $\frac{1}{5}$. Если всё время движения обозначить за t, то получаем уравнение $\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{t}{2} = 1$, откуда получается $\frac{(5+3)t}{2\cdot3\cdot5} = 1$, то есть $t = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ ч.

Если обозначить расстояние за S, то получаем $\frac{S}{2\cdot80} + \frac{S}{2\cdot60} = \frac{S}{40} + \frac{S}{30} = 15$ ч.

2

Ишмович.

~~3~~ 4.

...

$S = 15 \cdot \frac{40 \cdot 3}{4+3} = \frac{1800}{7} = 257{,}1 \approx 257$ км

Ответ: 257 км

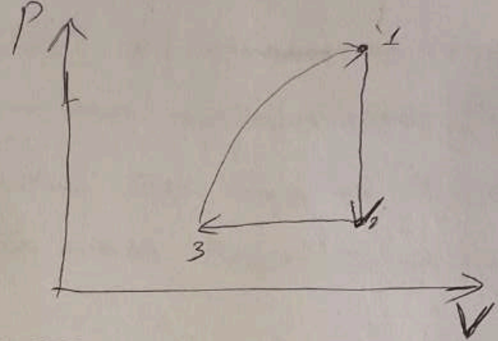
4.

Дано:

3 Этапа:

1) изохорическое уменьшение: с $3P_0$ до P_0
2) изобарическое увеличение: с P_0 до $3P_0$
3) возвращение в исходное состояние:

КПД - ?



1) Т.к. давление во всех точках не превышает nP_0, ~~что~~ а объем равен: $V_0 = \frac{m}{P_0}$ (m-масса газа), то максимальная ~~[illegible]~~ температура $T_1 = \frac{nP_0V_0}{R}$, а минималь $T_3 = \frac{P_0V_0}{nR}$. Следовательно, наибольш КПД при этой температуре равен

$\cancel{\eta} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow КПД = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

~~4~~. 6.

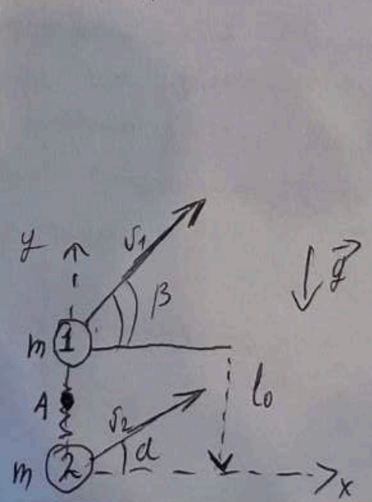
Дано:

верхняя масса: V_1; $\angle\beta$

нижняя масса: V_2; $\angle\alpha$

A - центр пружины.

h max -?



3

Шиловиц

6.

~~Х~~

I. Центр масс будет всегда находится в точке А. Пусть радиусы-векторы точек с массами $r_1(x_1;y_1)$; $r_2(x_2;y_2)$, тогда радиус-вектор центра масс определяется из соотношения:

$r_c = \frac{mr_1 + mr_2}{m+m} = \frac{r_1+r_2}{2}$ (1). Значит центр масс всегда будет находится в точке А.

II. Второй закон Ньютона для движения центра масс:

$2\bar{m}\bar{a} = 2\bar{m}\bar{g} \Rightarrow \bar{a} = \bar{g}$

Движение центра масс равноускоренное: $\vec{r_c}(t) = r_{c0} + \bar{V}_{c0}t + \frac{gt^2}{2}$

III. Начальная скорость определим из:

$\bar{V}_{c0} = \dot{r}_{c0} = \frac{V_{10}+V_{20}}{2}$

IV. Найдём перемещение центра масс в проекции на вертикальное направление y:

$y_c - y_{c0} = V_{c0}t + \frac{gt^2}{2}$, где $V_{c0} = \frac{(V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha)}{2}$. Тогда мы ищем максимальное значение функции:

$F(t) = t\frac{(V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha)}{2} + \frac{gt^2}{2}$, которое равно. $F_{max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha}{2}\right)^2$

Ответ: $\frac{1}{2g}\left(\frac{V_1\sin\beta + V_2\sin\alpha}{2}\right)^2$

4

Чистовик

5. ~~Задача~~

Дано:

$x(t) = 3 + \sin t \cdot \cos t - \sin t - \cos t$

$y(t) = t$

$y = cx$

c – положительная безразмерная константа.

Значения c, где частица освещается лучом – ?

1) Сделаем замену переменных. Пусть $p = \sin t + \cos t$, тогда $p^2 = 1 + 2\sin t + \cos t$, и зависимость x от t примет вид:

$x(t) = 3 + \frac{p^2 - 1}{2} - p$;

$p = \sin t + \cos t$;

$|p| \leq \sqrt{2}$.

Функция $x(t) = 3 + \frac{p^2 - 1}{2} - p = \frac{p^2}{2} - p + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(p-1)^2 + 2$, парабола с вершиной $p_0 = 1$, которая лежит в вершине ~~~~ точки 2. Так как $|p| \leq \sqrt{2}$, то минимальное значение функции будет в вершине, а максимальное – ~~в~~ при $p = \sqrt{2}$. Из этого следует, что область значения функции $= \left[2; \frac{7}{2} + \sqrt{2}\right]$. Таким ~~образом~~ образом, частица в разные моменты времени преобретает все точки отрезка AB, где $A(2; 1)$; $B\left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}; t\right)$. Данный в условии луч проходит через точку A при $c = \frac{1}{2}$, а через точку B при ~~~~

$c = \frac{1}{\frac{7}{2} + \sqrt{2}} = \frac{2}{7 + 2\sqrt{2}} = \frac{2(7 - 2\sqrt{2})}{41}$.

5

Чистовик

При всех пролетающих значениях c, найдутся моменты времени, когда луч освещает частицу. Таким образом:

$c \in \left[\frac{2(7-2\sqrt{2})}{41}; \frac{1}{2}\right]$

Ответ: $c \in \left[\frac{2(7-2\sqrt{2})}{41}; \frac{1}{2}\right]$

Черновик

1.

$$\boxed{S = \frac{at^2}{2}}$$
$$\boxed{v = at}$$

- $t = 15\,c.$
- $v = 100$ км/ч $=$

$= \frac{100\,000}{3600}$ м/с.

Дано:
$t = 15\,c.$
$v = 100$ км/ч.

$S - ?$

1) $v = at$

$\frac{100000}{3600} = a \cdot 15$

$a = \frac{100\,000}{3600} \cdot \frac{1}{15} = \frac{100}{18 \cdot 3} = \frac{100}{54}$

$\frac{50}{27}$

$a = \boxed{1,85}$ м/с²

$$\boxed{2)\ S = \frac{at^2}{2}}$$

$S = \frac{1,85 \cdot (15)^2}{2}$

$S = \frac{1,85 \cdot 225}{2} =$

$= \underline{208\,м.}$

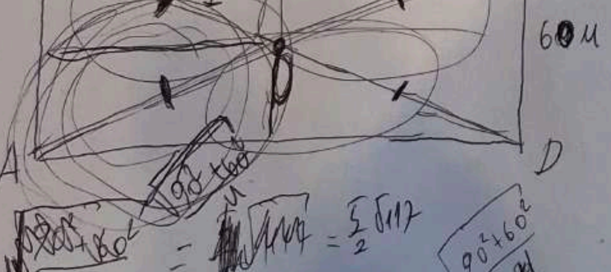
$\times\ \frac{225}{1,85}$

1125
1800
225

$416,25 \mid 2$
$208,125$

28

2.



$\frac{\sqrt{90^2 + 60^2}}{2} = \frac{\sqrt{8100 + 3600}}{2} = \frac{\sqrt{11700}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{117}$

$= \boxed{\frac{15}{2}\sqrt{13}\ м}$

1) Подберём так, чтобы повесить светильники посередине отрезков AO, BO, CO, DO на высоте равной ~~...~~ $\frac{1}{4}$ диагонали прямоугольника, тогда круг с центром в этой точке будет освещать прямоугольник находящ... в ~~этой~~ точке с диагональю AO. Второй будет освещать второй прямоугольник с диагональю BO и так далее. В этом случае все поле будет освещено, ⇒ высота потолка будет равна...

$\boxed{1}$

Черновик.

2.

... Нужно доказать, что это наиболее выгодное положение. Для этого используем принцип Дирихле. Возьмём 5 точек: – A B C D и O (расстояние между 2 любыми из этих точек не меньше чем половина диагонали прямоугольника и предположим что диаметр круга меньше чем половина диагонали прямоугольника. => ~~первый прожектор будет освещать круг в половине площади~~. один прожектор осветит не больше чем одну из этих 4 точек. Значит хотя бы одна точка останется неосвещённой.

2) $\cancel{\sqrt{731{,}25}}$

$$\sqrt{\frac{225\cdot 13}{4}} =$$

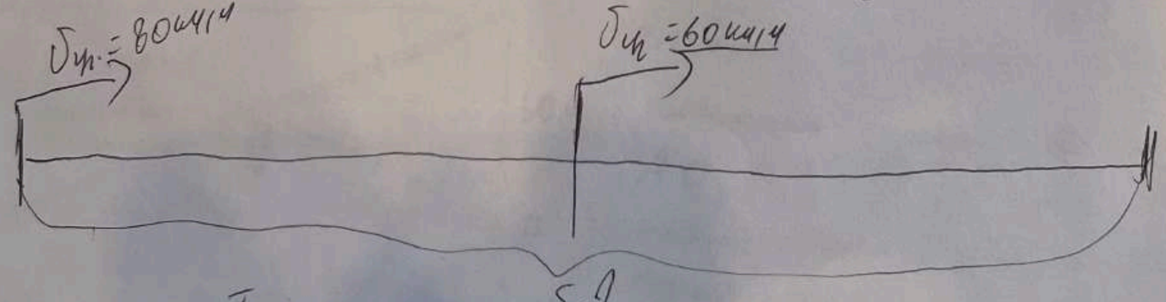
$225 \times 13 = 675 + 225 = 2925$

$2925 : 4 = 731$

$27 \times 27 = 189 + 54 = 729$

I

II



Тетрис

Мультик

телефон разряжается за 3 часа. видео
5 часов тетрис.

Бзаряд можно при видео $= \frac{1}{3}$ у.е/час.
при тетрисе $\frac{1}{5}$ у.е./час.

Черновик

3.

I часть пути: Тетрис; $V_{ср.\ поезда} = 80$ км/ч; разряжен от Тетриса за 5 часов

II часть пути: Видео; $V_{ср.\ поезда}$ 60 км/ч; разряжается от видео за 3 часа.

Возьмём условную единицу емкости смартфона: 1. Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна $\frac{1}{3}$, а при игре в тетрис $\frac{1}{5}$. Если всё время движения обозначить за t, то получаем уравнение $\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{t}{2}=1$, откуда получаем $\frac{(5+3)t}{2\cdot3\cdot5}=1$ то есть $t=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$ ч.

~~Получаем что~~

Если обозначим расстояние за S, то получаем

$$\frac{S}{2\cdot80}+\frac{S}{2\cdot60}=\frac{S}{40}+\frac{S}{30}=15\text{ ч}$$

$$S=15\cdot\frac{40\cdot3}{\frac{40}{4}+3}=\frac{1800}{7}\approx257{,}1\approx257\text{ км}$$

1800 | 7
−14 | 257,1
40
−35
50
−49
10

4.

I изохорический: с $3P_0$ до P_0

II изобарическое движение с P_0 до $3P_0$ + $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

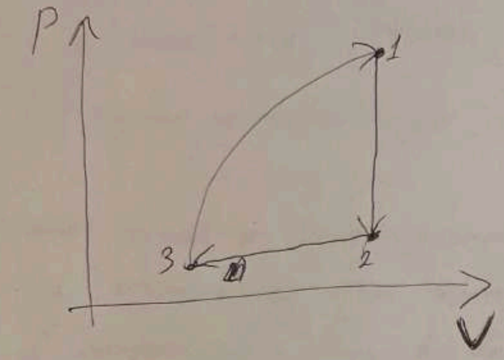
III исходные ... в осях P/P_0, P/P_0 ... с центром (;1)

3

2

Черновик

4.



Т.к. давление во всех точках не превышает $n P_0$, а

$V_0 = \frac{m}{P_0}$ то значит темп-ра

$T_1 = \frac{n P_0 V_0}{R}$ (макс)

$T_3 = \frac{P_0 V_0}{n R}$ (миним)

. Наибольш. КПД при такой температуре равен $1-\frac{T_2}{T_1}$ =>

КПД $= \left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

5.

Сделаем замену переменных. Пусть $p = \sin t + \cos t$, тогда $p^2 = 1 + 2\sin t \cos t$, и зависим. x от t принимает вид:

$x(t) = 3 + \frac{p^2-1}{2} - p$; $p = \sin t + \cos t$; $|p| \le \sqrt{2}$.

Функция $x(t) = 3 + \frac{p^2-1}{2} - p = \frac{p^2}{2} - p + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(p-1)^2 + 2$, парабола с вершиной $p_0 = 1$, имеющая минимум в вершине 2.

Т.к. $|p| \le \sqrt{2}$, то мин. значение функции будет в вершине, а максимум при $p = -\sqrt{2}$. Из этого следует что область значения функции $= \left[2; \frac{7}{2} + \sqrt{2}\right]$.

4

2

Черновик

Таким образом нам в позиции может вернуть необходимо все точки отрезка AB, где $A(2;1)$. $B(\frac{7}{2}+\sqrt{2};1)$.