МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **ФИЗИКА**

ФИО участника олимпиады: **Битлев Роберт Радмирович**

Класс: 8

Технический балл: **100**

Дата проведения: 24 февраля 2022 года

ШИФР РАБОТЫ 8950087

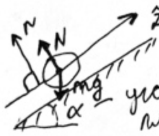
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>Задача</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td rowspan="2">100</td></tr>
<tr><td>Вопрос</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

ЧИСТОВИК

Задача 1

Запишем II закон Ньютона для шарика: (ось z сонаправлена с плоскостью)

m - масса шарика, N - сила нормальной реакции опоры на шарик



α - угол наклонной плоскости

II закон Ньютона для шарика в проекции на ось z:

$ma_z = -mg\sin\alpha \Rightarrow a_z = -g\sin\alpha$

II закон Ньютона для шарика в проекции на ось n:

$0 = ma_n = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha,\ a_n = 0$

Итого, ускорение шарика постоянно, направлено вниз и равно $|a_z| = g\sin\alpha$

Пусть точка запуска шарика находится в начале координат ($z_0 = 0$)

Начальная скорость шарика $v_{0z} = v_0$. Уравнение координаты шарика от времени: $z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2} = v_0 t + \frac{a_z t^2}{2}$. По условию, шарик побывал в точке $z = l$ в точках t_1 и t_2 $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} l = v_0 t_1 + \frac{a_z t_1^2}{2} \ \Big|\cdot t_2^2 \\ l = v_0 t_2 + \frac{a_z t_2^2}{2} \ \Big|\cdot t_1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} l t_2^2 = v_0 t_1 t_2^2 + \frac{a_z (t_1 t_2)^2}{2} & (1) \\ l t_1^2 = v_0 t_2 t_1^2 + \frac{a_z (t_1 t_2)^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (1) выражение (2):

$l(t_2^2 - t_1^2) = v_0 t_1 t_2 (t_2 - t_1) \Rightarrow v_0 = \frac{l(t_2^2 - t_1^2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} = l\,\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} =$

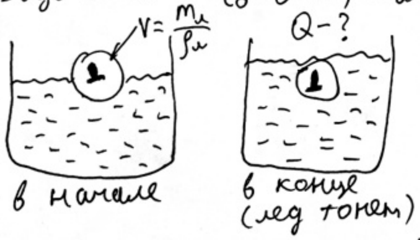
$= 0{,}6\,м \cdot \frac{1с + 2с}{1с \cdot 2с} = 0{,}9\,м/с$. Значит, $\frac{a_z t_1^2}{2} = l - v_0 t_1 = l\left(1 - \frac{t_1 + t_2}{t_2}\right) =$

$= -l\,\frac{t_1}{t_2} \Rightarrow a_z = -2l \cdot \frac{1}{t_1 t_2} = -\frac{2l}{t_1 t_2} = -\frac{2 \cdot 0{,}6\,м}{1с \cdot 2с} = -0{,}6\,м/с^2$

Проверка:
$$\begin{cases} 0{,}6\,м = 0{,}9\,м/с \cdot 1с + \frac{-0{,}6\,м/с^2 \cdot (1с)^2}{2} \\ 0{,}6\,м = 0{,}9\,м/с \cdot 2с + \frac{-0{,}6\,м/с^2 \cdot (2с)^2}{2} \end{cases}$$
Успешно!

Ответ: $v_0 = 0{,}9\,м/с$

Задача 2 $t_0 = 0°C$, $m_л = 100\,г$, $m_g = 5\,г$, $\rho_в = 1\,\frac{г}{см^3}$, $\rho_л = 0{,}9\,\frac{г}{см^3}$, $\lambda = 340\,\frac{Дж}{г}$



Сосуд при температуре плавления льда $\Rightarrow$ в процессе нагревания будет плавиться лед, а каждый из объектов будет при температуре t_0. Пусть мы расплавим объем ΔV льда. Тогда: $\rho_л \Delta V \lambda - Q = 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{\rho_л \lambda}$. Значит, остался лед объемом $V_1 = V - \Delta V = \frac{1}{\rho_л}\left(m_л - \frac{Q}{\lambda}\right) = \frac{m_л \lambda - Q}{\lambda \rho_л}$. Чтобы любое тело начало тонуть, его средняя плотность должна быть не меньше плотности окружающей жидкости. Найдем среднюю плотность содержимого после плавления льда: $\rho_{ср} = \frac{m_g + \rho_л V_1}{V_1} = \frac{m_g}{V_1} + \rho_л = \frac{\lambda m_g \rho_л}{\lambda m_л - Q} + \rho_л$. Чтобы тонуло, $\rho_{ср} \geq \rho_в \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\lambda m_g}{\lambda m_л - Q} \geq \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л} \Rightarrow \lambda m_g \rho_л \geq \lambda m_л (\rho_в - \rho_л) - Q(\rho_в - \rho_л) \Rightarrow Q \geq \frac{\lambda m_л (\rho_в - \rho_л) - \lambda m_g \rho_л}{\rho_в - \rho_л} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \geq \lambda m_л - \lambda m_g \frac{\rho_л}{\rho_в - \rho_л} \Rightarrow Q \geq \lambda\left(m_л - m_g \frac{\rho_л}{\rho_в - \rho_л}\right) = 340\,\frac{Дж}{г} \cdot \left(100г - 5г \cdot \frac{0{,}9\,г/см^3}{1\,г/см^3 - 0{,}9\,г/см^3}\right) =$

$= 340\,\frac{Дж}{г}(100г - 5г \cdot 9) = 340\,\frac{Дж}{г} \cdot 55г = 18700\,Дж = 18{,}7\,кДж$

ЧИСТОВИК

$\times\begin{array}{r}340\\55\end{array}$ 170 170 18700

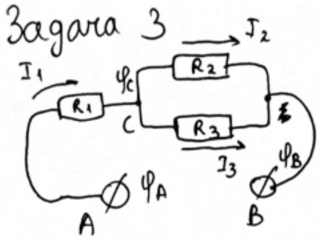
$18700 \,|\, 340$ = 55; −170; 170; −170; 0

Проверка: $V = \frac{1000}{9}$ см³, $\Delta V = \frac{550}{9}$ см³, $V_1 = V - \Delta V = \frac{450}{9}$ см³ $= 50$ см³

$\rho_{ср} = \frac{51 + 0{,}9 \cdot 50\ см^3}{50\ см^3} = 1 \frac{г}{см^3} = \rho_в$ – все сходится! Успешно.

Ответ: $Q \geq 18{,}7$ кДж

Задача 3



Пусть потенциал условной точки X равен φ_X. По резистору R_1 течет ток $I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1}$, по резистору R_2 течет ток $I_2 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2}$, по резистору R_3 течет ток $I_3 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_3}$ (каждый из этих токов может быть отрицательным, это означает, что ток в другую сторону). 1-ое правило Кирхгофа для узла C: $I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1} = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2} + \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_3}$

$\Rightarrow R_2 R_3(\varphi_A - \varphi_C) = R_1 R_3(\varphi_C - \varphi_B) + R_1 R_2(\varphi_C - \varphi_B) \Rightarrow \varphi_C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) =$

$= \varphi_A R_2 R_3 + \varphi_B R_1(R_2 + R_3) \Rightarrow \varphi_C = \frac{\varphi_A R_2 R_3 + \varphi_B R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$. Подставим $R_1 = R = 1$ Ом, $R_2 = 2R = 2$ Ом, $R_3 = 3R = 3$ Ом

$\varphi_C = \frac{\varphi_A \cdot 2R \cdot 3R + \varphi_B R(2R + 3R)}{R \cdot 2R + R \cdot 3R + 2R \cdot 3R} = \frac{6\varphi_A + 5\varphi_B}{11}$. Найдем токи:

$I_1 = (\varphi_A - \varphi_C)/R = \left(\varphi_A - \frac{6\varphi_A + 5\varphi_B}{11}\right)/R = \frac{5(\varphi_A - \varphi_B)}{11R}$

$I_2 = (\varphi_C - \varphi_B)/2R = \left(\frac{6\varphi_A + 5\varphi_B}{11} - \varphi_B\right)/2R = \frac{6(\varphi_A - \varphi_B)}{11R \cdot 2} = \frac{3(\varphi_A - \varphi_B)}{11R}$

$I_3 = (\varphi_C - \varphi_B)/3R = \left(\frac{6\varphi_A + 5\varphi_B}{11} - \varphi_B\right)/3R = \frac{6(\varphi_A - \varphi_B)}{11R \cdot 3} = \frac{2(\varphi_A - \varphi_B)}{11R}$

Мощность на резисторе R_1: $N_1 = I_1^2 R_1 = \frac{25(\varphi_A - \varphi_B)^2}{121 R^2} \cdot R = \frac{25(\varphi_A - \varphi_B)^2}{121 R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \sqrt{\frac{121}{25} N_1 R} = \frac{11}{5}\sqrt{N_1 R}$

Мощность на резисторе R_2: $N_2 = I_2^2 R_2 = \frac{9(\varphi_A - \varphi_B)^2}{121 R^2} \cdot 2R = \frac{18 \cdot \frac{121}{25} N_1 R}{121 R} =$

$= \frac{18}{25} N_1$

Мощность на резисторе R_3: $N_3 = I_3^2 R_3 = \frac{4(\varphi_A - \varphi_B)^2}{121 R^2} \cdot 3R = \frac{12 \cdot \frac{121}{25} N_1 R}{121 R^2} =$

$= \frac{12}{25} N_1$

Общая мощность цепи должна быть равна $N = I_1(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{5(\varphi_A - \varphi_B)^2}{11R} =$

$= \frac{5 \cdot \frac{121}{25} N_1 R}{11R} = \frac{11}{5} N_1$

Итого, $N_2 = \frac{18}{25} N_1 = 18$ Вт

Проверка: $\varphi_A - \varphi_B = \frac{11}{5}\sqrt{25\ Вт \cdot 1\ Ом} = 11$ В, $I_1 = \frac{5 \cdot 11\ В}{11\ Ом} = 5$ А, $I_2 = \frac{3 \cdot 11\ В}{11\ Ом} = 3$ А,

$I_3 = \frac{2 \cdot 11\ В}{11\ Ом} = 2$ А, $N_2 = 18$ Вт, $N_3 = 12$ Вт, $N = 55$ Вт. Действительно, $N = N_1 + N_2 + N_3$. Успешно!

Ответ: $N_2 = 18$ Вт

Задача 4.

То, что человек видит какой-либо объект в зеркале, означает, что он видит его изображение.

То, что человек полностью видит стену в зеркале, говорит, что он видит полностью её изображение, т.е. стена полностью лежит в области видимости человека в зеркале

Пусть глаза человека находятся на высоте h: **ЧИСТОВИК**

На рисунке обозначены лучи, которые позволяют человеку видеть изображение стены полностью. Чтобы такие лучи существовали, отрезок A_1B_1 весь должен быть покрыт зеркалом (в этих точках происходит отражение нужных лучей), поэтому длина зеркала $S \geq A_1B_1$. Вычислим нужные расстояния: $AH_A = BH_B = l$; $AO_A = BO_B = L$; $AO'_A = BO'_B = L$; $OH_A = h$, $OH_B = H-h$

$O_AO_B = O'_AO'_B = H$; $\angle OH_AO'_A = \angle A_1AO'_A = 90°$; прямые OO'_A и $A_1O'_A$ совпадают; прямые OO'_B и $B_1O'_B$ совпадают.

Значит, $\angle OO'_BH_B = \angle B_1O'_BB$ и $\angle OO'_AH_A = \angle A_1O'_AA$

По II признаку $\triangle OO'_AH_A$ подобен $\triangle A_1O'_AA$ (равенство двух углов).

Поэтому $\frac{OH_A}{A_1A} = \frac{O'_AH_A}{O'_AA} = \frac{O'_AA + AH_A}{O'_AA} = \frac{L+l}{L} \Rightarrow A_1A = OH_A\frac{L}{L+l} = \frac{hL}{L+l}$

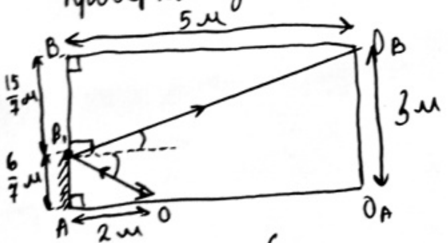
По II признаку $\triangle OO'_BH_B$ подобен $\triangle B_1O'_BB$ (равенство двух углов).

Поэтому $\frac{OH_B}{B_1B} = \frac{O'_BH_B}{O'_BB} = \frac{O'_BB + BH_B}{O'_BB} = \frac{L+l}{L} \Rightarrow B_1B = OH_B\frac{L}{L+l} = \frac{(H-h)L}{L+l}$

Очевидно, что $AB = AA_1 + A_1B_1 + B_1B \Rightarrow A_1B_1 = AB - (AA_1 + BB_1) = H - \frac{HL}{L+l} =$

$= H\left(1 - \frac{L}{L+l}\right) = H\frac{l}{L+l}$. Тогда $S \geq A_1B_1 = \frac{Hl}{L+l} = \frac{3м \cdot 2м}{5м + 2м} = \frac{6}{7}$ м

Проверка для $h = 0$: $A_1A = 0$, $B_1B = \frac{3м \cdot 5м}{5м+2м} = \frac{15}{7}$ м



$\triangle OAB_1 \sim \triangle O_BBB_1$ (по II признаку, по двум углам)

$\frac{OA}{AB_1} = \frac{O_BB}{BB_1} \Rightarrow \frac{2м}{\frac{6}{7}м} = \frac{5м}{\frac{15}{7}м}$, $\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

Успешная проверка!

Ответ: $S \geq \frac{6}{7}$ м