0 146707 850002

14-67-07-85
(28.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по космонавтике
наменование олимпиады

по ____________________
профиль олимпиады

Муравьева Ивана Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«4» марта 2023 года

Подпись участника

№1 63 (шестьдесят три) В.С. (Сазонов В.В.) Вл (Вл [illegible] В.Е.)

1 – наименьшее натуральное число, и любое натуральное число кратно 1.

рассмотрим какое-нибудь число n, удовлетворяющее условию (имеющее хотя бы 3 различных натуральных делителя и при этом равное сумме своих трёх наименьших натуральных делителей).

пусть 1, a, b – наименьшие натуральные делители n; $1 < a < b$; $a, b \in N$.

допустим, a – составное число. тогда найдется такое натуральное отличное от 1 число x, $x < a$, что $a \vdots x$. но $n \vdots a \Rightarrow n \vdots x$, а ведь a – наименьший отличный от 1 делитель числа n. тогда такое невозможно, и число a простое.

если $b \vdots a$: $a + b \vdots a$, $n = a + b + 1$; $n \vdots a \Rightarrow a + b + 1 \vdots a \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \vdots a$, но $a > 1$. такое невозможно.

значит, b не кратно a. число a – простое число, и значит, a и b – взаимнопростые числа,

$$\left.\begin{array}{l} НОК(a; b) = ab. \\ \left.\begin{array}{l} n \vdots a \\ n \vdots b \end{array}\right\} \Rightarrow n \vdots НОК(a; b) \end{array}\right\} \Rightarrow n \vdots ab.$$

$n = 1 + a + b$.

$1 + a + b \vdots ab$

a и b – натуральные числа, $a < b \Rightarrow a + 1 \le b$.

тогда $2b \geq 1 + a + b$.

$1 + a + b \vdots ab \Rightarrow 1 + a + b \geq ab$

$2b \geq 1 + a + b \geq ab \Rightarrow 2b \geq ab$.

$b \in N \Rightarrow 2 \geq a$. $a \in N$, $1 < a \le 2 \Rightarrow a = 2$.

$1 + 2 + b \vdots 2b \Rightarrow 1 + 2 + b \geq 2b \Leftrightarrow b + 3 \geq b + b \Leftrightarrow b \le 3$. т.к. $b > a$, а также $b \in N$, $2 < b \le 3 \Rightarrow b = 3$. ~~Как можно видеть, а при~~

см. след. стр.

№1 (продолжение)

Как можно видеть, три наименьших ~~делителя~~ натуральных делителя числа n определяются однозначно, а число n равно их сумме, следовательно, тоже определяется однозначно. при этом число $1+2+3=6$ действительно удовлетворяет условию. тогда 6 — и есть единственное такое натуральное число.

(1, 2 и 3 — действительно наименьшие различных натуральных делителя 6, и их сумма $=6$)

Ответ: 6

Ответ верный

№3

(Python 3)

```
N = int(input())
a = N//10
b = N%10
print(6*(a*6+b))
```

Неверно.
Забыто, что '70', '80', ... секунд не бывает

№4

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$$

пусть $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

тогда система принимает вид: $\begin{cases} y=f(x) \\ z=f(y) \\ x=f(z) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ z=f(f(x)) \\ x=f(f(f(x))) \end{cases}$$

заметим, что $2x^2 \geq 0 \ \forall x \in R$; $1+x^2 > 0 \ \forall x \in R \Rightarrow \dfrac{2x^2}{1+x^2} \geq 0 \ \forall x \in R \Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$, ~~[illegible]~~. заметим также, что уравнение $x = f(f(f(x)))$ не зависит от y и z, ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ а значит, для решения системы можно сначала решить это уравнение отдельно. ~~т.к. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$, то $x = f(f(f(x)))$ может выполниться только при~~ $x \geq 0$.

см. след. стр.

№4 (продолжение 1)

т.к. $f(x)\geq 0$ ~~при~~ $\forall x\in R$, то $x=f(f(f(x)))$ ~~может совпадать только~~ не может совпадать при $x<0$.

теперь рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-x$. ~~$g(x)>0$, если~~
$g(x)>0$, если $f(x)>x$; $g(x)<0$, если $f(x)<x$; $g(x)=0$, если $f(x)=x$.
таким образом, если $g(x)>0$, то $f(x)$ „увеличивает" свой аргумент, если $g(x)<0$, то $f(x)$ „уменьшает" свой аргумент, а если $g(x)=0$, то $f(x)$ „не изменяет" свой аргумент.

$$g(x)=f(x)-x=\frac{2x^2}{1+x^2}-x=\frac{2x^2-x(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{2x^2-x-x^3}{1+x^2}=\frac{-x(x^2-2x+1)}{1+x^2}=$$
$$=\frac{-x(x-1)^2}{x^2+1}$$

при $x<0$: $-x>0$; $(x-1)^2>0$; $x^2+1>0 \Rightarrow \frac{-x(x-1)^2}{x^2+1}>0 \Rightarrow g(x)>0$

при $x\geq 0$: $-x\leq 0$; ~~$(x-1)^2$~~ $(x-1)^2\geq 0$; $x^2+1>0 \Rightarrow \frac{-x(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$g(x)\geq 0$~~ $g(x)\leq 0$. ~~значит, при положительных x $f(x)$ либо выдает меньшие положительные числа, меньшие положительного числа, либо само число x. при этом само число x будет получаться при $g(x)=0$.~~

~~$g(x)\geq 0$~~ $\Rightarrow f(x)\leq x$.

при $x\geq 0$: ~~$g(x)\geq 0$~~ $g(x)\leq 0$

~~рассмотрим случаи, когда $f(x)=x$.~~

найдем все x, при которых ~~$f(x)=x$~~ $g(x)=0$: тогда при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$: $g(x)<0$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x(x-1)^2}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

~~при $x=0$: $g(x)=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow f(f(x))=0$~~

$g(0)=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow f(f(f(0)))=0$

$g(1)=0 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow f(f(f(1)))=1$

при $x\in(-\infty;0)$: $f(f(f(x)))\neq x$

$x<0$; $f(f(f(x)))\geq 0$

при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$:

$g(x)<0 \Rightarrow f(x)\leq x$

~~$\Rightarrow f(x)<x \Rightarrow g(f(x))\leq 0$~~ $\Rightarrow f(x)<x$

$f(x)\geq 0 \Rightarrow g(f(x))\leq 0 \Rightarrow f(f(x))\leq f(x)$

$f(f(x))\geq 0 \Rightarrow g(f(f(x)))\leq 0 \Rightarrow f(f(f(x)))\leq f(f(x))$

$\Rightarrow f(f(f(x)))<x \Rightarrow x\neq f(f(f(x)))$

Таким образом, $f(f(f(x)))=x$ только при $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$. (см. след. стр.)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№4 (продолжение 2)

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f(f(x)) \\ x=f(f(f(x))) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ z=f(f(x)) \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=f(0) \\ z=f(f(0)) \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=f(1) \\ z=f(f(1)) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0;0;0); (1;1;1)

Ответ верный

№2

На грузик действуют только 2 силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{T}$ (натяжения нити)

$\vec{T}$ постоянна постоянно, а значит, при поднятии груза он двигается с постоянным ускорением. Обозначим это ускорение за $\vec{a}$.

т.к. изначально грузик покоился, то за время t при постоянном ускорении $\vec{a}$ он сместился бы на вектор $\frac{\vec{a}t^2}{2}$.

~~тогда~~ $\cancel{\boxed{\frac{\vec{a}t^2}{2}}}$ ~~h~~ $\frac{\vec{a}t^2}{2}$ ~~$\uparrow\uparrow a \Rightarrow$~~

тогда: $\left|\frac{\vec{a}t^2}{2}\right| = h$, откуда $|\vec{a}| = \frac{2h}{t^2}$.

$\frac{\vec{a}t^2}{2} \uparrow\uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ направл. вертикально вверх.

По второму закону Ньютона, $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$, откуда $\vec{T} = m(\vec{a} - \vec{g})$

$\vec{T} \uparrow\uparrow \vec{a}$; $\vec{T} \uparrow\downarrow \vec{g} \Rightarrow |T| = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right)$.

Теперь рассмотрим "верхнюю часть" верёвки, ~~которую мы~~ которую мы поднимаем с силой $\vec{F}$. ~~пусть~~ пусть у неё масса m_1 (которая на самом деле стремится к 0), тогда на неё действует сила натяжения нити $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1 = -\vec{T}$, т.к. нить нерастяжима и невесома. если на неё действуют силы: $m_1\vec{g}$ и $\vec{F}$, ~~и при под~~ см. след. стр.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№2 (продолжение)

И при поднятии вверх оно, очевидно, будет двигаться с ускорением $\vec{a}$.

Из 2-го закона Ньютона:

$\vec{F} + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m_1(\vec{a} - \vec{g}) - \vec{T}_1$ нетрудно видеть, что при устремлении m_1 к $+0$ $\vec{F}$ стремится к $-\vec{T}_1$, так что $|\vec{F}| = |\vec{T}_1| = |\vec{T}| = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right)$.

Работа A, совершаемая силой $\vec{F}$ при поднятии верхней части нити на высоту h, тогда будет равна:

$A = Fh = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right)h = 1\text{кг}\cdot\left(\frac{2\cdot 2\text{м}}{3^2\text{с}^2} + 10\text{м/с}^2\right)\cdot 2\text{м} =$

$= 10,(4)\ \text{Н}\cdot 2\text{м} = 20,(8)\ \text{Дж}.$ верно

Ответ: 20,~~8~~9 Дж неверное округление

№6

Гайка будет двигаться в сторону „источника" гравитации, ведь её плотность больше плотности воды, а значит, сила ~~с которой вода будет~~ Архимеда, (с которой вода будет пытаться „выталкивать" гайку подальше от „источника" гравитации будет меньше силы тяжести, которая будет двигать гайку в сторону „источника" гравитации. Воздух же ~~не такой плотный, как вода~~ в разы менее плотный, чем вода, так что пузырёк будет двигаться в противоположную сторону от „источника" гравитации.

~~Всё выше сказанное относится, если ...~~

Верно, но где же этот источник?

ЧЕРНОВИК

$a, b, c \in N$

~~$a \neq b \quad b \neq c \quad a \neq c$~~

$a < b < c$

$a+b+c = abc \cdot k, \quad k \in N$

$\frac{2x^2}{1+x^2} = y$

$\frac{2y^2}{1+y^2} = z$

$\frac{2z^2}{1+z^2} = x$

$a+b+c \,\vdots\, abc$

$a+b+c \geq abc$

$\frac{x^2+x^2}{x^2+1}$

$a+b \,\vdots\, c$

№3

$3c > a+b+c \geq abc$

$\frac{a+b}{c} + 1 \,\vdots\, ab$

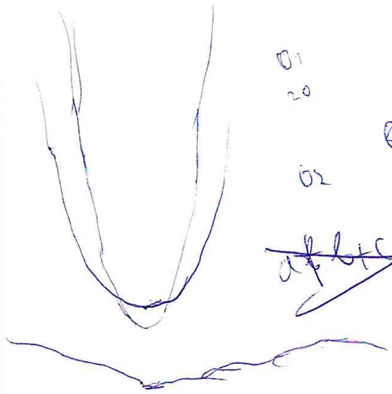
$3c > abc$

$c \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow ab < 3$

$2x^2(1+x^2)^{-1}$

~~$a+b+c = abck$~~



$f(f(f(x))) =$

$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

$1, a, b$

$a, b \in N$

$1 < a < b$

$f(x) = y \qquad y = f(x)$

$f(y) = z \qquad z = f(y)$

$f(z) = x \qquad x = f(z)$

$f(f(f(x))) = x$

$6*(a*6+b)$

$b = a^2$

$\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{4x^4}{1+2x^2+x^4}$

$b+3 \,\vdots\, 2b$

$b = ax, \; x \neq a$

$\begin{cases} b = a^2 \\ b - \text{простое} \end{cases}$

$\frac{2\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^2}{1+\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^2} =$

$b+3 \geq 2b$

$3 \geq 2b - b$

$f(x) - x = \frac{2x^2}{1+x^2} - x = \frac{2x^2 - x(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= \frac{\left(\frac{8x^4}{1+2x^2+x^4}\right)}{\left(\frac{2x^2+1+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}\right)} =$

$1+a+b \,\vdots\, a$

$\frac{2x^2 - x - x^3}{1+x^2}$

$a+b+1 \geq ab$

$a+1 \geq b$

$b+1 \,\vdots\, a$

$1+a+b \,\vdots\, b$

$a+1 \,\vdots\, b$

$2b \geq a+b+1 \geq ab$

$2b \geq ab$

$2 \geq a$

$1+a+a^2 \,\vdots\, a^2$

$= \frac{8x^4(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(1+4x^2+x^4)}$

$\frac{-x^3+2x^2-x}{1+x^2} =$

$\frac{x(-x^2+2x-1)}{1+x^2} =$

$= \frac{-x(x-1)^2}{1+x^2}$

$a = 2$

$1+2+3 = 6 = a \cdot 2 \cdot 3$

$1+a \,\vdots\, a^2$

$1+a \,\vdots\, a$

$(1+a)^2 \,\vdots\, a \Rightarrow 1 \,\vdots\, a$

$D = 16 - 4 = 12$

$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} x = -2+\sqrt{3} \\ x = -2-\sqrt{3} \end{cases}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{8x^4}{(x^2+1)^2}}{\frac{1+4x^2+x^4}{(1+x^2)^2}} = \frac{8x^4}{1+4x^2+x^4} =$

$= \frac{8x^4}{(x^2+2+\sqrt{3})(x^2+2-\sqrt{3})}$

$= \frac{4x(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} =$

$= \frac{4x^3 - 2x^2 + 4x}{(1+x^2)^2} =$

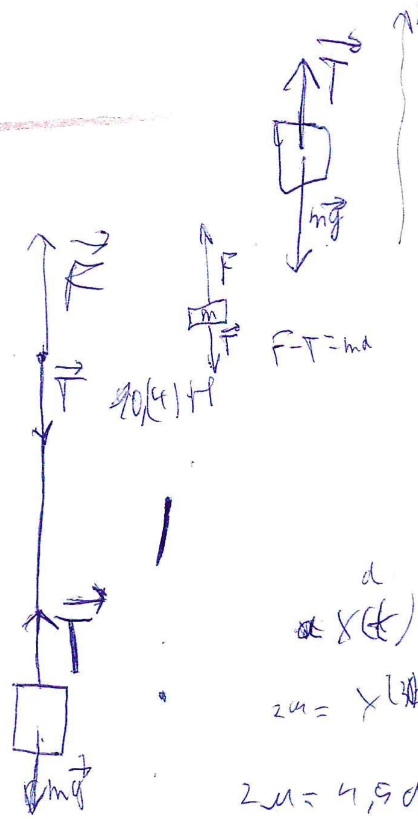
$= \frac{x(4x^2 - 2x + 4)}{(x^2+1)(x^2+1)}$

$\frac{-x(x-1)^2}{1+x^2}$

$+ \quad - \quad -$

$0 \quad 1 \quad x$

ЧЕРНОВИК



$mg = 10H$

$\cancel{F \neq mg}$

$mg_x = -10H$

$F - T = ma$

$T_x + mg_x = ma_x$

$\frac{T_x}{m} + g_x = a_x$

$\frac{T_x}{m} = a_x - g_x$ $\quad T_x = m(a_x - g_x)$

$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$

$2м = x(3) - x(0) = 4{,}5a \cdot c^2$ м

$2м = 4{,}5a \cdot c^2$

$a = \frac{2 м}{4{,}5 c^2} = \frac{4}{9} м/c^2 = 0{,}(4) м/c^2$

$T_x = 1кг \cdot 10{,}(4) H/кг = 10{,}(4) H$

~~$A = F h = 20(8)$~~

$T = 10{,}(4) H$

F

ЧЕРНОВИК

ЧЕРНОВИК